微分法へのイントロダクション

1　変化する量を調べる

これまで学んだ数学の中で，ものの個数や量を表現するために「数」を用いて計算を行いその性質を調べ，また，ものの形を表現する為に三角形や円などの「図形」を用いてそれらの性質を調べてきた．はじめは，主として，変化しない数量・静止した図形を取り上げてきたが，やがて，変化する量を扱うようになり，そのようなものを重要な例としつつ関数について学ぶようになった．例えば，石ころを手から離して自由落下させたときの，手を離してからの時間と落下距離の間には 2 次関数で表される関係があった．[注1]

これから学ぶ微分法とは，変化する量について，その変化のありさまをより詳しく調べる方法である．変化する量の典型として，質点の運動（時間の経過に対応した位置の変化）を例にとってみよう．

1.1　等速直線運動

今，時刻 $t = 0$ のときに原点にあった点 P が，x 軸の正の方向に毎秒 2m の速さを保ちながら動いているとする．図 1 のような状態である．時刻 t における点 P の座標を $x = f(t)$ と表す．

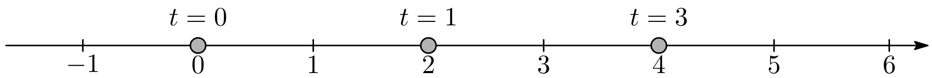


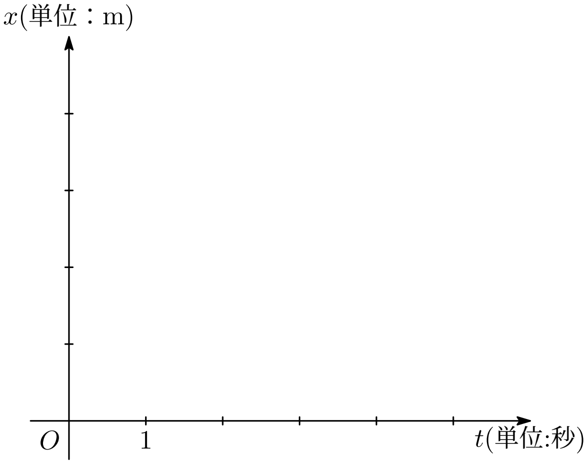
図 1: 等速直線運動

図 1 において，丸印はその上に添えられた時刻 t における点 P の位置を表している．ここに書きこまれている三つの丸印は，三個の異なる物体を表しているのではなく，一個の物体の三つの異なる時点における位置を示している．このように，運動する物体を動かない図に描き表すのはなかなか難しい．時間 t の値をより細かくとって点の位置を図の中に描き込むと，数直線がたくさんの丸印で埋まってしまい何がなんだかわからなくなってしまう．

[注1] 2 次関数を学んだときに自由落下について聞いた覚えのない人は，後で例として取り上げるので気にしないで進んでほしい．

そこで，運動（時間経過に対応した位置の変化）を視覚的に把握する一つの方法として，横軸に時間経過をとり，縦軸に位置をとったグラフを利用する．これを時間-位置グラフと呼ぼう．

問題 1.1. 上の例について，時間-位置グラフを描け．



問題 1.2. 時間-位置グラフにおいて，速度はグラフの中のどこに表現されているか．

ここでは，速度という物理的概念が，時間-位置グラフの中で，どのような図形的概念と対応しているのかをしっかりと把握しておいてほしい．

1.2 自由落下

次に，時間とともに速度が変化するような運動の典型として，自由落下について考えてみよう．地球上で，ある高さから物体 P を自由落下させたときの，落下を始めてからの時間 t（秒）と落下距離 y（m）との間には (さまざまな単純化を行えば) 次の関係式が成り立っているという．

$$y = \frac{1}{2}gt^2, \text{ここで } g = 9.8(\mathrm{m/s^2}) \text{ は重力加速度である．}$$

等速直線運動の場合と違い，自由落下運動では最初の 1 秒間に落下する距離と次の 1 秒間に落下する距離は異なる．従って，速度を考えるに為には「いつからいつまでの」速度なのかを指定しなければならない．「いつからいつまで」を指定して始めて，その間の「平均の速度」を求める事ができる．

問題 1.3. 上に述べた自由落下において，$t=1$ から $t=3$ までの平均速度は毎秒何メートルか．また，$t=3$ から $t=5$ までの平均速度は毎秒何メートルか．

等速直線運動の場合には，時間-位置グラフは直線となり，運動の速度はその直線の傾きとして現れた．自由落下の場合，$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ という関係式からわかるように，時間-位置グラフは放物線となる．

問題 1.4. 上の問題で求めた平均速度は，$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ のグラフの中で図形的には何に対応しているかを考えよ．

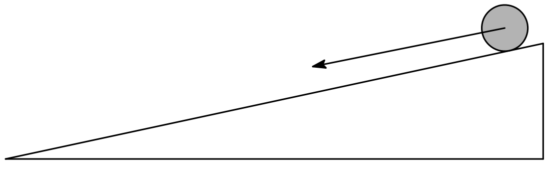
問題 1.3 からもわかるように，自由落下ではどの時間幅をとるかによって平均速度が変化している．ここで平均速度を計算する際にとった時間幅の中でも，さらに細かく見れば，前半と後半では落下距離が異なるだろう．そこで，正確にある時刻を指定して，その時点での速度を調べてみよう $\cdots$ と考えるのは自然だが，しかし，ここではっきりさせなければならない事がある．

ある時点における速度とは何か？

いくらかの時間幅をとれば，その間の落下距離とかかった時間をもとに平均の速度を計算する事ができる．しかし，平均の速度ではなく，ある時点，まさにその瞬間の速度とは何であろうか？これをはっきりと捉える事が以下の目的である．

2　瞬間速度

以下，係数を調整して扱いやすくする為に自由落下ではなく斜面を転がり落ちる球を例として取り上げる．ここで，転がり始めてから t（秒）間に落下した距離を y（m）とするとき，$y=t^2$ という関係が成り立つように斜面の角度を調整してあるものと考える．



この運動において，ちょうど 1 秒後，すなわち $t=1$ における瞬間の速度とはなにかということをきちんと言い表してみたい．

まず，この運動の時間-位置グラフを $t = 1$ の付近で描いておこう．$t = 1$ から $t = 1.5$ までの平均速度が，時間-位置グラフの中では対応する 2 点 A，B を結ぶ直線の傾きとして現れることを確認しておいてほしい（問題 1.4 に対する答え）．

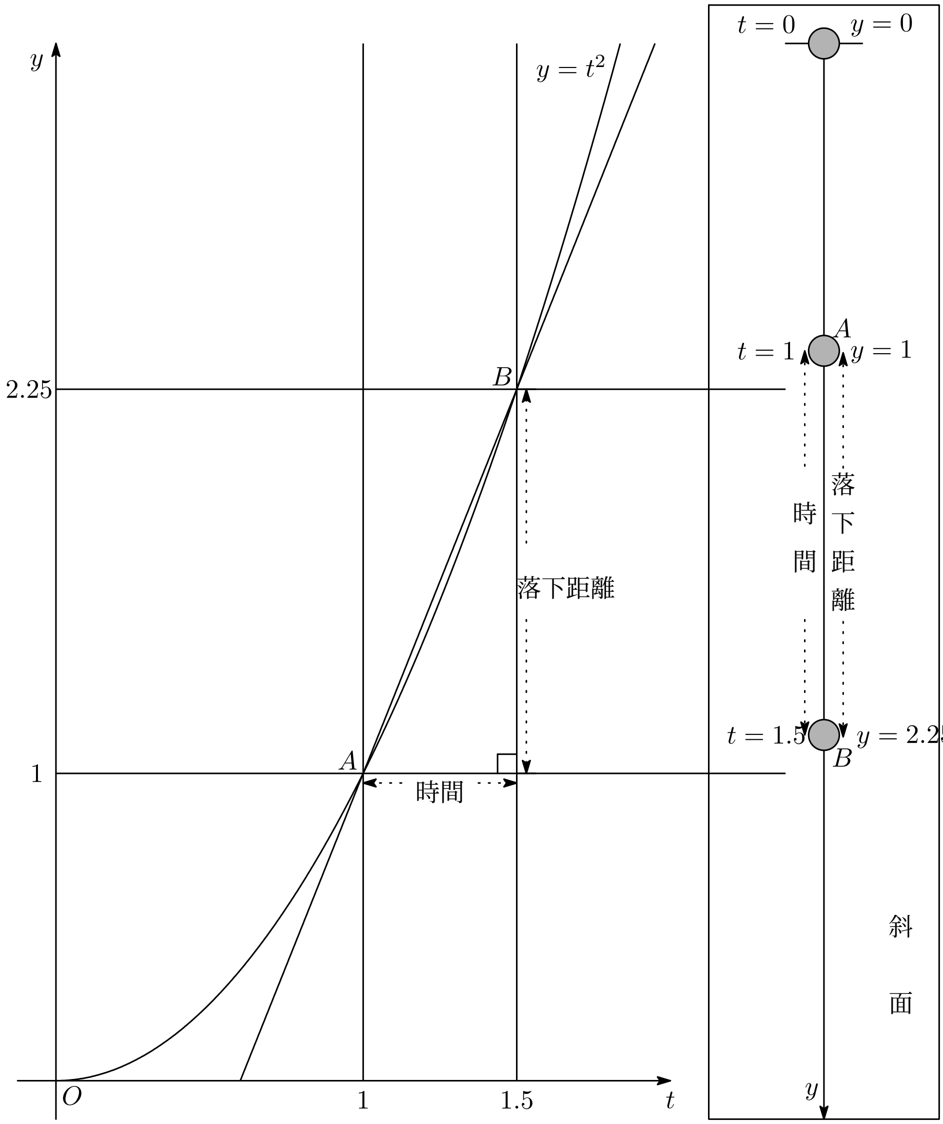


図 2: 右：斜面上を落下する球，　左：その時間-位置グラフ

ちょうど $t = 1$ における瞬間の速度を捉える為に，次のように考える．時間幅をとらない一点としての時刻をいきなり考えたのでは，その間の落下距離も経過時間も 0 となり速

度を考えることはできない．そこで，$t=1$ の近くでほんの少し時間幅をとって，そこでの平均速度を計算してみよう．この時間幅を狭くとればとるほど，平均速度は，ちょうど 1 秒後における速度と呼べるものに近づいていくのではないだろうか．

問題 2.1. 上の例において，次の表に示された範囲における平均速度を計算せよ．また，その結果を見て，ちょうど 1 秒後における瞬間速度はいくらであると予想されるか．なお，計算には電卓等を利用してよい．

時間間隔	平均速度
$t=1$ から $t=1.1$ まで	
$t=1$ から $t=1.01$ まで	
$t=1$ から $t=1.001$ まで	
$t=1$	??瞬間速度??
$t=0.999$ から $t=1$ まで	
$t=0.99$ から $t=1$ まで	
$t=0.9$ から $t=1$ まで	

ここで，時間間隔を狭くしつつ何度も計算しなおす代わりに，文字記号を用いて同種の計算を 1 回で済ませてしまおう．時刻 $t=1$ からのほんの少しの時間経過を h 秒と表し，$t=1$ から $t=1+h$ までの平均速度を求めてみよう．この結果が文字 h を含んだ形で求められ，そこに，$h=0.1$ や 0.01 を代入すると容易に上の問題の表の空欄に入る平均速度が求められる．

問題 2.2. 上の例において，$t=1$ から $t=1+h$ までの平均速度を求めよ．次に，得られた結果において，h の値を $h=0.1, 0.01, 0.001$ あるいは $h=-0.1, -0.01, -0.001$ 等と取りかえることにより問題 2.1 の結果が得られることを確かめよ．

今考えている運動では，斜面に沿った落下距離 y は $y=t^2$ で与えられている．説明を書きやすいように，$f(t)=t^2$ と置こう．問題 2.2 の解答の前半，すなわち時刻 $t=1$ から $t=1+h$ までの平均速度は次のようになる．

$$\text{経過時間は，}(1+h)-1=h\,(\text{秒}) \tag{1}$$

$$\text{落下距離は，}f(1+h)-f(1)=(1+h)^2-1^2(\mathrm{m}) \tag{2}$$

$$\text{従って平均速度は，}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=2+h\,(\mathrm{m/s}). \tag{3}$$

対応する時間-位置グラフを図 3 に示す．平均速度は，グラフ内の 2 点 A, B を結ぶ直線の傾きとして現れる．

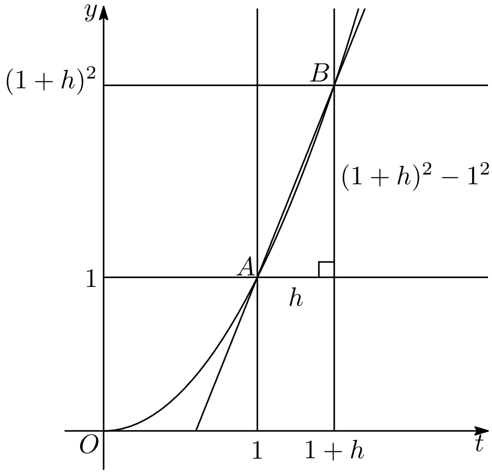


図 3: $t=1$ から $t=1+h$ までの平均速度

この結果として得られた $2+h$（m/s）において，h に数値を代入する事で問題 2.1 で求めた値が得られる事は容易にわかる．さらに，この結果から次の事がわかる．

$$h \text{ を限りなく } 0 \text{ に近づけるとき，} \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} \text{ は限りなく } 2 \text{ に近づく．} \tag{4}$$

この結果はまた，問題 2.1 において表を見ながら「瞬間速度」の欄に入るべき値として予想したものに一致しているだろう．問題 2.1 では 6 個の値に対して計算した結果を眺めたが，文字 h を用いて計算したこの式を見れば，他のさまざまな h の値に対しても，それが小さくなればなるほど，平均速度の値は 2 に近づいて行くだろうという事がわかる．**この値を，時刻 $t=1$ における瞬間速度と定義し，$f'(1)$ と書き表す．** これまでの考察は，この瞬間速度の定義を引き出す為のものであり，また，このように定義する事の妥当性を説明するものとなっている．

ここでいくつかの記号と言葉を導入する．(4) に書かれた内容を，次のように言い表す．

$$h \text{ を限りなく } 0 \text{ に近づけたとき，} \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} \text{ は\textbf{極限値} } 2 \text{ を持つ．} \tag{5}$$

さらに，同じ内容を手短に次のように書き表す．lim は「リミット」と読む．

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2 \tag{6}$$

問題 2.3. 物体 P が数直線上を運動しているとする．時刻 t（秒）における位置（座標）が $f(t) = t^3$（m）で表されているとする時，$t=2$ における瞬間速度（m/s）を求めよ．

以上の結果を整理しておこう．

> **定義 2.1.** 数直線上を運動する物体 P の，時刻 t における座標が $f(t)$ であるとする．このとき，時刻 $t=a$ における瞬間速度を次のように定義する．
>
> $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

3　微分係数

これまで，変化するものの典型として運動（時間経過に対応した位置の変化）を扱って来た．そこで用いた方法は，運動に限らず変化するものを調べようとするときに適用できるものである．そこで，運動という物理的イメージを手がかりにしながらもそれのみに限定することなく，一般に関数 $y=f(x)$ に対して平均速度や瞬間速度に対応する概念を定義しておこう．同時に，それらが関数 $y=f(x)$ のグラフにおけるどのような図形的意味と対応しているのかも整理しておく．

> **定義 3.1.** 関数 $y=f(x)$ の，$x=a$ から $x=b$ までの**平均変化率**を次のように定義する．
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

これは，運動の例における平均速度に対応するものである．$y=f(x)$ のグラフ上では，2 点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ を結ぶ直線の傾きに対応している（図 2 参照）．

さらに，運動の例における瞬間速度に対応するものを次のように定義する．

> **定義 3.2.** 関数 $y=f(x)$ の，$x=a$ における**微分係数**を次のように定義する．
>
> $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

この定義の意味は「h が 0 以外の値を取りながら限りなく 0 に近づくとき，もし $\frac{fa+h)-f(a)}{h}$ がある特定の値に限りなく近づくならば，その値（すなわち極限値）を $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数と呼び，$f'(a)$ と書き表す」というものである．[注2]

最後に，微分係数は $y=f(x)$ のグラフにおいてどのような図形的意味を持つのかを見ておく．図 3（p.6）において，h を 0 に近づけるとき，点 B は点 A の方へと近づいてい

[注2] 「限りなく近づく」ような「特定の値」が存在しない場合もある．その場合，微分係数は存在しない．

く．このとき，2 点 A, B を結ぶ直線は点 A における接線へと近づいて行くように見える．そうならば，2 点 A, B を結ぶ直線の傾きは点 A における接線の傾きへとへと近づいて行くだろう．実際，$f(x) = x^2$ の例で，そのグラフと一緒に点 $(1, 1)$ を通り傾き $f'(1) = 2$ の直線を描きこんでみると次のようになっている．たしかに，これら二つのグラフは接し

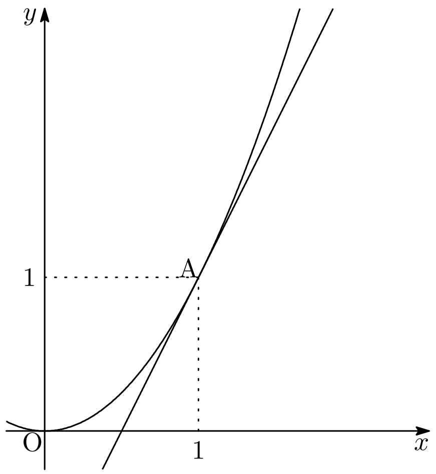


図 4: $y = x^2$ と $y = 2x - 1$ のグラフ

ているように見える．実は，「瞬間の速度とは何か」という疑問を突き詰めてきたこれまでの議論は，同時に「接線とは何か」という疑問を突き詰めて来たに等しい．ここで接線を次のように定義する．これまでの議論が，この定義が無理のないものであることを示している．

定義 3.3. 関数 $y = f(x)$ に対し，グラフ上の点 $(a, f(a))$ を通り微分係数 $f'(a)$ を傾きに持つ直線を点 $(a, f(a))$ における**接線**という．

問題 3.1. 関数 $y = x^3$ のグラフの $x = -1$ における接線の方程式を求めよ．また，原点における接線の方程式を求めよ．

（深川久　最終更新日：2002 年 11 月 4 日）