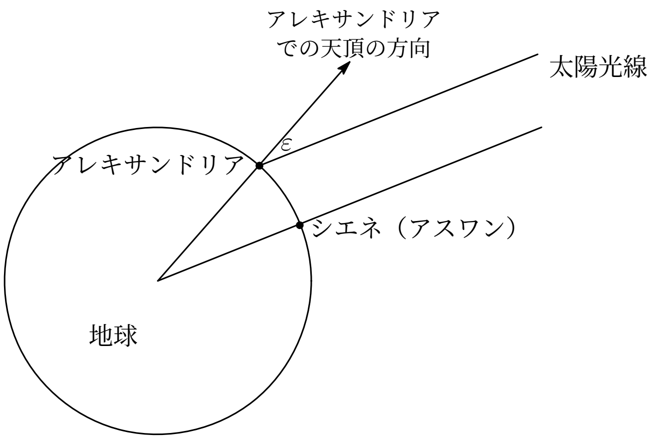
宇宙を測った人々 —エラトステネス，アリスタルコスの考えたこと—

1　紀元前 3 世紀，キュレネのエラトステネス

今から 2200 年以上前，Cyrene[*1]の人エラトステネスは，地球の全周の長さを求めることに成功したといわれています。地球を一周したわけではありません。Syene[*2]の町では，夏至の正午に町の深い井戸の一番底まで太陽の光が影を作らずに差し込むことを知って，ある方法を使ったのです。エラトステネスが使った方法は，現在では中学校で学習する図形の知識で理解することができます。

問題 1.1. エラトステネスは，次の三点を手がかりとして地球の大きさを計算したという。同じ手がかりをもとに，地球の周の長さを求めてみよ。

(1) 太陽は十分遠く，太陽からの光は平行光線と考えてよいだろう。
(2) シエネの町とアレクサンドリアの町の距離は 5000 スタディオンである[*3]。
(3) シエネの町で太陽が天頂にあるとき，アレクサンドリアの町では太陽は天頂から $7.2°$ ずれた方向にある。



[*1] 現在のリビアのシャハト
[*2] 現在のエジプトのアスワン
[*3] スタディオンは当時の長さの単位。距離は王の伝令が両市間を走る時間から求めたという [2, p.136]。

2　エラトステネスの方法

前ページの問題に，ゆっくりと答えてみましょう。まず，平行な 2 直線に 1 本の直線が交わっているとき，それらの直線がなす角についての性質を思い出しておきましょう。

右図において，ε で表した二つの角は，互いに「同位角」の関係にあるといい，その大きさは一致しています。このことから，前ページの図において，アレクサンドリアとシエネを結ぶ弧に対応する中心角は，アレクサンドリアにおける太陽の方向の天頂からのずれ $\varepsilon = 7.2°$ に一致することがわかります。

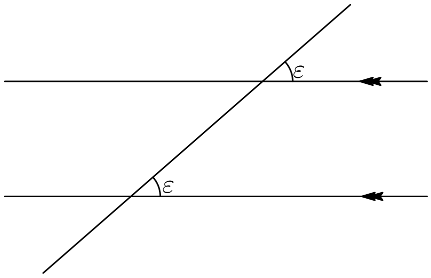


図 1: 同位角

中心角 7.2° に対する弧の長さが 5000 スタディオンなので，全円周の長さはその $\dfrac{360°}{7.2°}$ 倍，つまり 50 倍となるでしょう。

$$500 \times \frac{360°}{7.2°} = 250000$$

このようにして，25 万スタディオンという値が出てきます。ここでは，中心角と対応する円弧の長さは比例することを利用しました。

1 スタディオンが現在の単位に換算してどれほどの長さであるのかについては, 諸説があります。マオール [2, p.136] には，エラトステネスの見出した値は 29,000〜35,000 マイルの間であり，正しい値は，極円周では 24,818 マイル，赤道では 24,902 マイルだと述べられています。当時としてはおおむね正確な値と言えるでしょう（キロメートルに直せば，地球の周は約 4 万キロメートル，エラトステネスの見出した値は，約 4 万 6 千〜5 万 6 千キロメートル)。

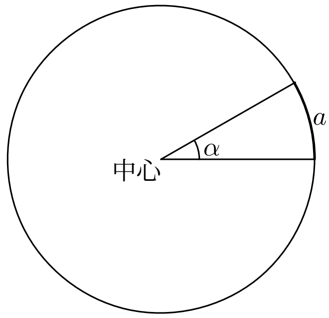


図 2: 中心角と対応する弧の長さは比例する

エラトステネスは，このようにして，直接測ることのできる値（ここではシエネの町とアレクサンドリアの町の距離）をもとに，直接測ることのできない地球の周の長さを求めたのです。

3　サモスのアリスタルコス『太陽と月の大きさと距離について』

アリスタルコスもまた，紀元前 3 世紀の人です。現存する作品は，『太陽と月の大きさと距離について』。彼はこの著作の中で次の 3 つを主張しました。

(1) 地球から太陽までの距離は，月までの距離の 18 倍より大きく 20 倍より小さい。
(2) 太陽の直径と月の直径との比は，それぞれの地球からの距離の比と同じである。
(3) 太陽の直径と地球の直径の比は 19 : 3 よりは大きいが，43 : 6 よりは小さい。

これらは，次に挙げる事柄をもとにして導き出されています。

(1) 月は太陽の光を受けて輝く。
(2) 月は地球のまわりを，地球を中心とした円軌道を描いて回る。
(3) 月がちょうど半月に見えるとき，地球と月と太陽は直角三角形をなし，地球のところでの頂角は 87° である（観測結果)。
(4) 皆既日蝕の瞬間，地上から見た月と太陽の視角はともに 2° である（観測結果)。
(5) 月蝕のとき，月の位置において地球の陰の幅は月の直径の約 2 倍である（月が隠れている時間から求めた)。

実際には「87°」のような観測値の誤差が大きく，アリスタルコスの得た結果は真の値からはかけ離れています。それでも，観測結果に基づいて幾何学的方法で天文計算を行った先駆者として，その業績は高く評価されています。以下，第 1 の結果「地球から太陽までの距離は月までの距離の 18 倍よりも大きく 20 倍より小さい」がどのように導かれるのかを見ていきましょう。

条件「半月のとき地球と月と太陽は直角三角形をなし，地球のところでの頂角は 87° である（観測結果)」から図 3 が描かれます。

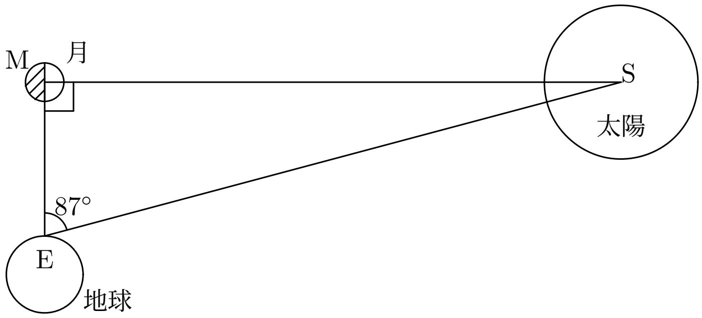


図 3: 半月のときの地球・月・太陽の位置関係

目的を明確にしてきましょう。「地球から太陽までの距離は月までの距離の 18 倍よりも大きく 20 倍より小さい」を式で表せば，次のようになります。

$$18 \cdot \mathrm{EM} < \mathrm{ES} < 20 \cdot \mathrm{EM}$$

この式を示すことができれば，目的を達したことになります。。

4　三角比で書き表す

さて，1 年生はこれから三角比の授業に入るところなので，三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ などについて，記号の意味だけを説明しておきましょう。アリスタルコスの時代にこのような記号があったわけではないにですが，私達にとっては，後の時代に作られた記号を利用して整理した方が理解しやすくなります。

角 θ が与えられたとする。$0° < \theta < 90°$ とする。このとき，図 4 のような直角三角形を作る。

ここで，AB と書けば線分 AB の長さを表すことにして，角 θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ を次のように定義する。

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}},\ \cos\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}},\ \tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

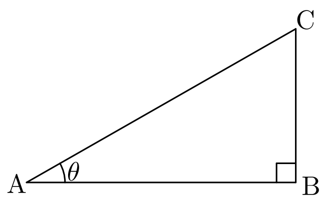


図 4: 三角比の定義

ここで，次の問題を考えましょう。

問題 4.1. 図 3 の記号の下で，目的の式「$18 \cdot \mathrm{EM} < \mathrm{ES} < 20 \cdot \mathrm{EM}$」を，三角比を利用した形に書き直せ。

（「ある角度に対するある三角比の値が，ある二つの値の間にある」という形の不等式に書き表すことができる。）

5　三角比の性質についての準備

ここで，後の考察に必要となる性質を用意しておきます。アリスタルコス自身は，以下に示す性質に対応する事実（三角比を使って表現したのではなく，直角を挟む辺や円弧の長さを使って表している）を，証明しないで既知のこととして使っています。

まず，三角比の定義を見直しておきます。右図は，グラフ用紙に原点を中心とした半径 1 の円（単位円）を書き，x 軸の正の向きを表す半直線を原点を中心に反時計まわりに角 θ だけ回転して得られる半直線と単位円との交点を P としたものです。また，P から x 軸に下ろした垂線を PX，y 軸に下ろした垂線を PY とします。ここで，三角比の定義を思い出すと，△OXP において斜辺 OP の長さが 1 であることから，次の関係が得られます。

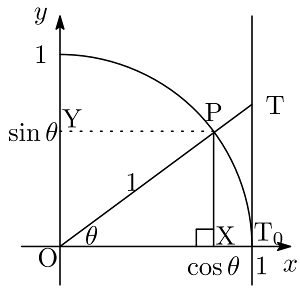


図 5: 単位円と三角比

$$\sin\theta = \mathrm{OY}, \cos\theta = \mathrm{OX}, \tan\theta = \mathrm{T_0T}$$

問題 5.1. 本当にそうなっていることを，三角比の定義を参照しながら確認せよ。

以上を念頭において，図 6 を観察しましょう。この図では，原点から放射状に伸びた半径は，15° 刻みに描かれています。したがって，P_1 の表す角を基準にとったとき，P_2，P_3，P_4 の表す角はその 2 倍，3 倍，4 倍となっています。一方，それらの角に対する正弦の値は OY_1，OY_2，OY_3，OY_4 ですが，これらの線分の長さは最初のものを基準にとったとき，後のものたちが 2 倍，3 倍，4 倍になっているわけではありません。OY_2 は OY_1 の 2 倍には届かず，OY_3，OY_4 も OY_1 の 3 倍，4 倍にはますます届きません。

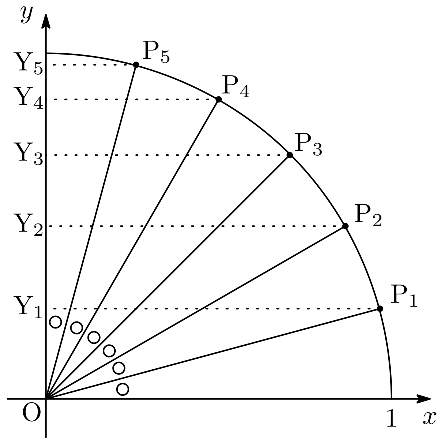


図 6: 角を等間隔に刻んだときの正弦

一般に，角 α と β がともに鋭角で $\alpha > \beta$ を満たすとき，上の観察から，$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ が $\dfrac{\alpha}{\beta}$ よりも小さいだろうと予想できるでしょう。

$$90^\circ > \alpha > \beta > 0^\circ \text{のとき}, \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \cdots \text{Ⓐ}$$

上の議論は証明にはなっていませんが，以下これを認め，不等式 Ⓐ として引用します。

次に，正接について考えましょう。図 7 を参照すれば，正弦の場合と同様にして，次の不等式が成り立つことが予想されます。

$90^\circ > \alpha > \beta > 0^\circ$のとき, $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \dfrac{\alpha}{\beta}$ $\cdots$ Ⓑ

問題 5.2. 上の不等式が成り立つであろう，という根拠を，図を利用して説明せよ。（厳密な証明になっていなくてもよい。）

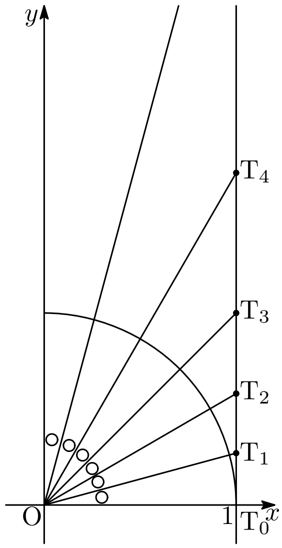


図 7: 角を等間隔に刻んだときの正接

これで準備が整いました。ここで，問題 4.1 の答えを書いておきます。すなわち，図 3 の記号の下で，目的の式「$18\cdot\mathrm{EM} < \mathrm{ES} < 20\cdot\mathrm{EM}$」を，三角比を利用した形に書き直してみます。

$$\begin{aligned}
18\cdot\mathrm{EM} < \mathrm{ES} < 20\cdot\mathrm{EM} &\iff \frac{1}{20} < \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{ES}} < \frac{1}{18}\\
&\iff \frac{1}{20} < \sin\angle\mathrm{ESM} < \frac{1}{18}\\
&\iff \frac{1}{20} < \sin 3^\circ < \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

このことから，目的の式を導くことは，$\sin 3^\circ$ の値が上の不等式で表される範囲にあることを導くことと同等であることが分かります。

6　結論を導く

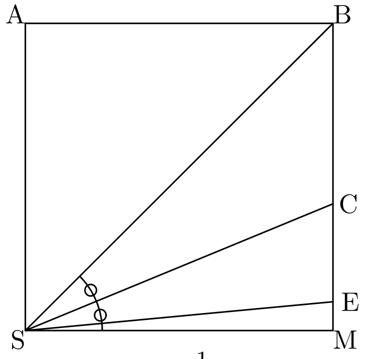


図 8: $\sin 3^\circ < \dfrac{1}{18}$ を導く図

図 8 において，$\angle\mathrm{BSC} = \angle\mathrm{CSM}$ とする。また，$\angle\mathrm{EMS} = 3^\circ$ とします。E,M,S はそれぞれ地球（Earth），月（Moon），太陽（Sun）のつもりです。まず，不等式 Ⓑ から，次式が得られます。

$$\frac{\tan\angle\mathrm{MSC}}{\tan\angle\mathrm{MSE}} > \frac{45^\circ/2}{3^\circ} = \frac{15}{2}$$

ここで，正接の定義を用いれば，

$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{EM}} > \frac{15}{2}$$

次に，CM と BM の関係を求めましょう。

$\dfrac{\mathrm{SB}^2}{\mathrm{SM}^2} = 2 > \dfrac{49}{25}$ より，$\dfrac{\mathrm{SB}}{\mathrm{SM}} > \dfrac{7}{5}$

また，$\triangle\mathrm{SMB}$ において $\angle\mathrm{BSC} = \angle\mathrm{CSM}$ であるから $\mathrm{BC} : \mathrm{CM} = \mathrm{SB} : \mathrm{SM}$*4。

ゆえに，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}} = \dfrac{\mathrm{SB}}{\mathrm{SM}} > \dfrac{7}{5}$ したがって，

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{BC}+\mathrm{CM}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{CM}} + 1 > \frac{7}{5} + 1 = \frac{12}{5} = \frac{36}{15}$$

これらを合わせて，次の関係を得る。

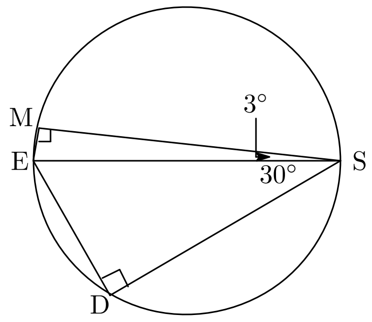
$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{EM}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{CM}} \cdot \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{EM}} > \frac{36}{15}\frac{15}{2} = 18$$

したがって，$\dfrac{\mathrm{EM}}{\mathrm{SM}} = \dfrac{\mathrm{EM}}{\mathrm{BM}} < \dfrac{1}{18}$，つまり，$\tan 3^\circ < \dfrac{1}{18}$。$\alpha < 90^\circ$ のとき $\sin\alpha < \tan\alpha$ なので，$\sin 3^\circ < \dfrac{1}{18}$ となります。

問題 6.1. 上の議論を一行一行丹念に追いかけて確かめよ。

*4 三角形の内角の 2 等分線に関する有名な定理。数学 A の授業で取り上げる。

問題 6.2. 図を利用して，$\sin 3^\circ > \dfrac{1}{20}$ であることを導け。（ヒント：直角三角形 $\triangle$SED において，$\angle\mathrm{ESD} = 30^\circ$ であることから，$\mathrm{ED} : \mathrm{ES} = 1 : 2$ であることを用いる。また，不等式 Ⓐ を用いる。）



以上をまとめると，$\dfrac{1}{20} < \sin 3^\circ < \dfrac{1}{18}$ を得る。

7　おわりに

前節まで，アリスタルコスの最初の主張「地球から太陽までの距離は，月までの距離の 18 倍より大きく 20 倍より小さい」を追跡してみました。彼の他の主張を導くには，日食の観測結果を巧妙に用いる必要があります。

ここまでの議論においても，平行線に交わる一直線と同位角，円弧と対応する中心角，三角形の内角の 2 等分線が対辺を分ける比，三角比の定義，性質，不等式の変形，$\cdots$ など，ちょうど中学校から高校 1 年生の数学 I，数学 A あたりで学ぶ事柄が次々と現れます。

アリスタルコスやエラトステネスが世界を把握しようとして駆使した数学的方法が，現在の教科書に載っている内容と 2200 年の時を経てつながっている。なかなか愉快な話だと思いませんか。

参考文献

[1] ファン・デル・ウァルデン「数学の黎明—オリエントからギリシアへ—」みすず書房，1984.
[2] エリ・マオール「素晴らしい三角法の世界」青土社，1999.

（深川久　最終更新日：2003 年 9 月 26 日）