
指数・対数で表わされる現象

以下，常用対数表は自由に用いてよい．また，結果は対数表の精度に応じたおよその値，ないし範囲で示す程度でよい（「26000 円以上 27000 以下」，「26000 円～27000 円」など）．

1 複利計算

今，銀行に 100 万円を預けたとしよう．最初に預けた金額を元金と呼ぶ．元金に対して，1 年間で 1% の利子がつくとしよう．最初の 1 年も，次の 1 年も，またその次の 1 年も，常に最初に預けた 100 万円に対する 1%，すなわち 1 万円の利子しかつかないとき，このような利子の計算法を「単利計算」という．それに対して，最初の 1 年間で 1% の利子がついて 101 万円になり，次の 1 年は最初の 1 年の元利合計額 101 万円に対して 1% の利子がつく，という計算法を「複利計算」という．

問題 1.1. 年利 1% の複利で 50 万円を預けた．元利合計が 60 万円を超えるのは何年後か（1 年単位で考える事とする）．

問題 1.2. 月 3% の利子を月毎の複利計算で支払う約束で 10 万円の借金をした．そのまま，まったく返済できずに 1 年経ったとき，借金はいくらになっているか．また，2 年経ったとき，3 年経ったときにはどうか．

利息制限法・第1条（利息の最高限）

金銭を目的とする消費貸借上の利息の契約は、その利息が左の利率により計算した金額をこえるときは、その超過部分につき無効とする。

元本が10万円未満の場合 年2割

元本が10万円以上100万円未満の場合 年1割8分

元本が100万円以上の場合 年1割5分

問題 1.3. 問題 1.2 における利率は、利息制限法の定める利率を超過しているか。その場合、借金をしてから1年後の元利合計金額のうち、利息制限法によって無効となる金額はいくらか。

出資の受入れ、預り金及び金利等の取締りに関する法律・第5条（高金利の処罰）

金銭の貸付けを行う者が、年百九・五パーセント（二月二十九日を含む一年については年百九・八パーセントとし、一日当たりについては〇・三パーセントとする。）を超える割合による利息（債務の不履行について予定される賠償額を含む。以下同じ。）の契約をし、又はこれを超える割合による利息を受領したときは、三年以下の懲役若しくは三百万円以下の罰金に処し、又はこれを併科する。

2 前項の規定にかかわらず、金銭の貸付けを行う者が業として金銭の貸付けを行う場合において、年四十・〇〇四パーセント（二月二十九日を含む一年については年四十・一一三六パーセントとし、一日当たりについては〇・一〇九六パーセントとする。）を超える割合による利息の契約をし、又はこれを超える割合による利息を受領したときは、三年以下の懲役若しくは三百万円以下の罰金に処し、又はこれを併科する。（以下略）

問題 1.4. 問題 1.2 における貸し手は、上記法律の定めるところにより処罰の対象となるか。ただし、この貸し手は上記第二項の言うところの「金銭の貸付けを行う者が業として金銭の貸付けを行う場合」に該当するものとする。

2 人口論

イギリスの経済学者マルサス (Thomas Robert Malthus, 1766–1834) は著書『人口の原理』において、社会の貧困等は人口増加が食糧増加を上回る結果起こる過剰人口による、と主張したという。マルサスによれば、ある良い条件のもとでは人口は一世代 (25 年) で 2 倍になるというように、一定期間で何倍という増え方 (\times 定数) をするのに対して、食糧生産はせいぜい一定期間で一定量増加という増え方 ($+$ 定数) しかない、という。

問題 2.1. 人口が毎年一定の割合で増加し続けた結果、25 年で 2 倍になったとする。この割合で人口が増加しつづけたとすると、1 世紀の間に人口は何倍になるか。

問題 2.2. 人口が毎年一定の割合で増加し続けた結果、25 年で 2 倍になったとする。このとき、1 年あたり何パーセントの人口増であったと考えられるか。

問題 2.3. ねずみの妊娠期間は約 14 日から 21 日で、条件が良ければほぼ周年にわたって 1 度に 5 匹から 10 匹程度の子を産むという。仮に、ねずみの人口 (ねずみ口?) が 1 ヶ月で 5 倍になるとすると、一つがいのねずみは 1 年間で何匹になると考えられるか。

3 ねずみ講

無限連鎖講の防止に関する法律

第一条（目的） この法律は、無限連鎖講が、終局において破たんすべき性質のものであるのにかかわらずいたずらに関係者の射幸心をあおり、加入者の相当部分の者に経済的な損失を与えるに至るものであることにかんがみ、これに關与する行為を禁止するとともに、その防止に関する調査及び啓もう活動について規定を設けることにより、無限連鎖講がもたらす社会的な害悪を防止することを目的とする。

第二条（定義） この法律において「無限連鎖講」とは、金品（財産権を表彰する証券又は証書を含む。以下この条において同じ。）を出えんする加入者が無限に増加するものであるとして、先に加入した者が先順位者、以下これに連鎖して段階的に二以上の倍率をもつて増加する後続の加入者がそれぞれの段階に応じた後順位者となり、順次先順位者が後順位者の出えんする金品から自己の出えんした金品の価額又は数量を上回る価額又は数量の金品を受領することを内容とする金品の配当組織をいう。

第三条（無限連鎖講の禁止） 何人も、無限連鎖講を開設し、若しくは運営し、無限連鎖講に加入し、若しくは加入することを勧誘し、又はこれらの行為を助長する行為をしてはならない。（以下省略）

問題 3.1. あなたが、次のような手紙を受け取ったとする。

突然のお便りで失礼いたします。この度、わずかな労力で莫大な収入を得る画期的なシステムについてひとりでも多くの皆さんに知って頂きたく、このようなお手紙を出させて頂きました。方法は簡単、次に挙げる2つのステップを、忠実にそのまま実行してください。あとはただ待つだけ。貴方のお手元に次々と現金が届き始めることでしょう。

[1] 末尾の名簿にある5人の住所に、それぞれ1000円ずつを送る。

[2] 名簿の一番上の一人を消し、一番下に自分の名前と住所を入れ、他の文面はこの手紙とまったく同じにしたものを作り、できるだけ多くの人に送る。（以下略）

- (1) 一番はじめにこの手紙を出した一人を第0世代と呼ぶ。第0世代から手紙を受け取り、その文面を忠実に実行した人達を第1世代と呼ぶ。以下同様に、第 n 世代から手紙を受け取り、その文面を忠実に実行した人達を第 $n+1$ 世代と呼ぶ。一人の出した手紙に対して、ちょうど5人がその文面を忠実に実行したとすると、一つの世代の人数が5000万人を超えるのは第何世代か。

- (2) 上の条件のもとで、第 0 世代から第 n 世代までの人数合計が一億人を超えるのは、 n がいくらのときか。
- (3) 上の条件のもとで、人口には限りがなくこのシステムが永遠にうまく作動するという（非現実的な）仮定をすれば、手紙の文面を忠実に実行した人は 5000 円支払っていくらの収入を得る事になるか。
- (4) 無限連鎖講防止法の文面にある「終局において破たんすべき性質のもの」という一文について、その理由を説明せよ。
- (5) 無限連鎖講防止法の文面にある「いたずらに関係者の射幸心をあおり」という一文について、その理由を説明せよ。

無限連鎖講の防止に関する法律（つづき）

第四条（国及び地方公共団体の任務） 国及び地方公共団体は、無限連鎖講の防止に関する調査及び啓もう活動を行うように努めなければならない。

第五条（罰則） 無限連鎖講を開設し、又は運営した者は、三年以下の懲役若しくは三百万円以下の罰金に処し、又はこれを併科する。

第六条（罰則） 業として無限連鎖講に加入することを勧誘した者は、一年以下の懲役又は三十万円以下の罰金に処する。

第七条（罰則） 無限連鎖講に加入することを勧誘した者は、二十万円以下の罰金に処する。

4 放射性元素の崩壊

原子のなかには、ひとりでに放射線を出して崩壊するものがあることが知られている。この現象が見つかったのち、磁場における曲がり方などから放射線には3種類あると考えられるようになり、それぞれ α 線、 β 線、 γ 線と名づけられた。その後、 α 線はヘリウムの原子核であり、 β 線は電子（普通電子の場合 β^- 線、陽電子の場合 β^+ 線という）、 γ 線は波長のきわめて短い電磁波（光子）であることがわかった。

α 線、 β 線を出した元素は原子番号が変わり、別の元素に移る。これを α 崩壊、 β 崩壊という。崩壊は確率的な性格を持ち、単位時間に崩壊する原子数は、そのときの放射性原子の数に比例する。崩壊によってもとの原子数が半分に減る期間を半減期という。

問題 4.1. ラジウム (Ra) の半減期を 1600 年とすれば、1g のラジウムは 400 年後には何グラムになるか。

問題 4.2. プルトニウムの同位体の一つ ^{239}Pu の半減期は 2.44×10^4 年である。1g のプルトニウムの質量が 10 分の 1 になるにはおよそ何年かかるか。

5 年代測定

炭素の同位体のうち、質量数 14 のもの ^{14}C は放射性をもち、その半減期は 5730 年であるという。

大気中では上層で宇宙線が絶えず ^{14}C を作りだし、崩壊によって減少する分を補充する為、その中に含まれる C 全体と ^{14}C の比は一定であると考えられる。生物が活着している間は、体内の炭素と大気中の炭素が常に交換されている為に、体内における ^{14}C の C 全体に対する比の値は大気中における値と同じである。生物が死ぬとこのような交換が行われなくなる為、 ^{14}C は時間経過とともに減少する。従って、発掘された骨の中に含まれる ^{14}C の C 全体に対する比が大気中の半分しかなければ、この骨はおよそ 5730 年前のものであると推測される。^{注1}

問題 5.1. 試料に含まれる ^{14}C の C 全体に対する比の値が、大気中の 3 分の 1 しかなかったとすると、この試料はおよそ何年前のものであると推測されるか。

スペインのアルタミラ洞窟や南フランスのラスコー洞窟の壁画などでは、赤色顔料として酸化鉄 (III) が、また黒色には二酸化マンガンや木炭が使われている。この木炭や、接着剤などとして含まれる有機物の分析により、アルタミラの野牛は $14,000 \pm 400$ 年前のものである事がわかっている。

また、磔にされたキリストの遺骸を包んだとされるトリノ大聖堂の『聖骸布』から切り取られた試料が三つの研究機関で測定され、確率 95% で AD1260 ~ 1390 の物であるとされた。真っ赤な偽物だったのだ。^{注2}

注1 田村二郎『微積分読本』第 11 章 年代決定 (岩波書店, 1975.) を参考にした。

注2 吉田邦夫「年代をはかる」、『ウロボロス』(東京大学総合研究博物館ニュース), Vol.1, No.2, 1996.

6 『驚くべき対数法則の記述』初版本表紙

図 1 に Napier, John.(1550-1617) *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*,... の初版本表紙を示す。この画像は金沢工業大学が『世界を変えた書物「工学の曙文庫」所蔵 110選』としてインターネット上で公開しているものである。

授業で配布した時には、ここに画像を入れて印刷した。

図 1: 驚くべき対数法則の記述, エディンバラ, 1614 年, 初版。(金沢工業大学ライブラリーセンター所蔵)