対数の話

1　とても簡単な質問から

まず，次の問に答えてみてください．

(1)　次の掛け算の結果を紙に書いてみてください．$10000 \times 100000 =$
(2)　上の計算の際にあなたがしたことをできるだけ詳しく説明してください．

ひとつめの問に対する答えは，一瞬のうちに書き下せたでしょう．そこでほとんど意識せずに行っていることを，改めて振り返ってもらうと，ふたつめの問に対してたいてい次のような答えが帰ってきます．

> 最初の数値 10000 を書いておいて，次に，二番目の数値 100000 についているゼロの個数と同じだけゼロを書き足していった．

あるいは，

> 最初の数値にゼロが 4 個，二番目の数値にゼロが 5 個あるので，足して 9 個のゼロを書き並べていった．

ここで，ゼロの個数を数えるとは，$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$ というように，何個の 10 の積なのかを求める事にほかなりません．すなわち，上の回答は，頭の中で次のような計算を行っている事を示しています．

$$10000 \times 100000 = 10^4 \times 10^5 = 10^{4+5} = 10^9 = 1000000000$$

おそらく累乗という言葉や指数法則というものを習う以前から，100000 のような数の計算には暗黙のうちに指数法則を利用していたことでしょう．そして，このような掛け算は，他の 3456×43679 のような掛け算にくらべて格段にやさしいものとして映っている事と思います．

2　なぜ易しいと思えるのか

いま，掛け算 8192×16384 を手で計算しなさい，といわれたら，少々面倒だと思うかもしれません．しかし，これらの数が実は $8192 = 2^{13}$ であり，また，$16384 = 2^{14}$ であ

ることを知れば，その面倒さもいくぶん軽く感じるでしょう．すなわち，指数法則を使って次のように計算する事ができるからです．

$$2^{13} \times 2^{14} = 2^{13+14} = 2^{27}$$

もちろん，2^{27} の計算はまだ残されていますが，掛け算の結果についてかなり見通しが立ったといえるでしょう．

前節の問でも，またここに挙げた例でも，掛け算の計算が，指数の足し算の計算をすることで済んでしまう—指数法則—ことが，これらの例に挙げた掛け算が他の一般の掛け算よりもやさしいと思える背景なのだといえます．

次の図は，指数について学んだときに用いたものです．指数法則を使った計算は，この図の中で上段にある二数の積を求めるのに，対応する下段の数に移ってから和を求め，その結果に対応する上段の数をみればよい，という事を表しています．

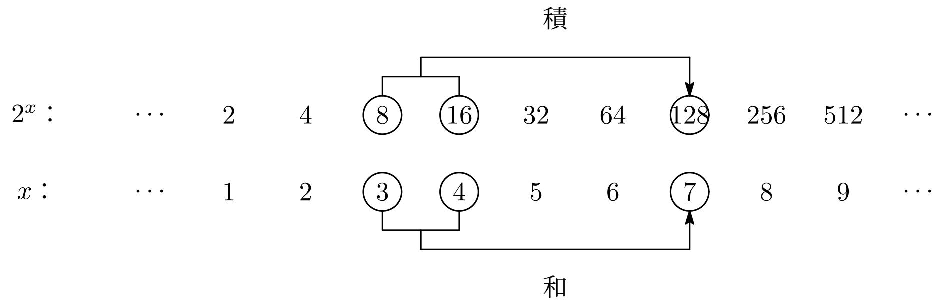

図 1: 2^x と x の対応図（x が自然数の場合）

さて，ここからが問題です．このような計算法が使える数は，この図ではとても限られています．2^x の形の数に対して指数法則を使った掛け算が適用できても，そのような形の数は正の方へ大きくなるにつれてまばらになっていきます：$\cdots, 512, 1024, 2048, \cdots$．これらの間にある多くの数に対して，同じような工夫をして，掛け算を足し算に変換する事ができないものでしょうか．前節のように，10^x の形を用いるならば，$10, 100, 1000, 10000, \cdots$ といった数たち以外の数に対しても，同じような工夫ができないものでしょうか．

問題 2.1. 図 1 を用いて，2^x の段の割り算が x の段のどのような計算に対応しているかを説明しなさい．

3　飛躍

そこで，次のような発想の飛躍をします．たとえば 187 のような数でも，10^x の形に表せないだろうか．9.36 のような小数でも，10^x の形に書けないだろうか．どんな数でもこ

のように 10 の累乗の形に書けて，なおかつ指数法則が使えるならば，一度 $x \leftrightarrow 10^x$ の対応表さえ作っておけば，掛け算の問題を指数の足し算の問題に帰着させる事ができるだろう．これが対数というものの背景にある動機なのです．

4　指数関数で学んだこと

実は，正の数はすべて，ある実数 x を用いて 10^x の形に書くことができるという事を，すでに指数関数の所で学んでいます．より一般に，底 a（a は 1 以外の正の数）を決めたときに，正の数はすべて a^x の形に書くことができました．しかも，そのように拡張した場合にも，2 乗，3 乗のような自然数乗のときと同じように指数法則が使える（というよりも，むしろ指数法則が成り立つように a^x を x が実数の場合にまで拡張していった）という事が，指数関数について学んだ最も基本的な事実でした．

図 2 に，指数関数 $y = 10^x$ のグラフを示します．このグラフからも，値域が正の実数全体であることが見て取れます．すなわち，「正の数はすべて 10^x の形に書くことができる」という事に他なりません．さて，上に書いた文章の問題意識は，指数関数を学んだときと

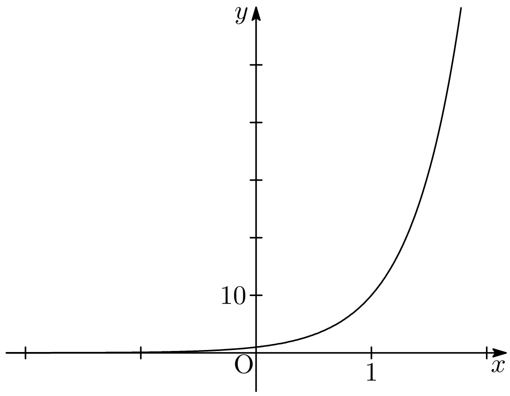

図 2: 関数 $y = 10^x$ のグラフ（縦横で縮尺を変えてあるので注意）

はやや異なった方向を向いている事に気づいた人もいることと思います．「x が与えられたときに，10^x は何を表しているのか（例えば $x = \frac{2}{3}$ のときに，$10^{\frac{2}{3}}$ とは何を表しているのか）」という方向を向いているのではなくて，逆に，「y が与えられたときに，それが 10^x の形に書けないだろうか」という方向を向いています．

なお，歴史的には，指数関数の形が整備されてからその逆が考えられたのではなく，まず数 y に対して，掛け算を足し算に変換するような仕組みがないだろうか，という問題意識から対数計算法が発展していったのだといわれています．

5　対数表

例を見ましょう．今，9.38×7.42 という計算を，指数法則を利用して計算してみます．そのための手順を細かく分けて書くと次のようになります．

$$9.38 = 10^p \text{となるような } p \text{ を見つける．} \tag{1}$$
$$7.42 = 10^q \text{となるような } q \text{ を見つける．} \tag{2}$$
$$9.38 \times 7.42 = 10^p \times 10^q = 10^{p+q} \quad \text{（指数法則より．）} \tag{3}$$
$$p + q \text{ を計算する．} \tag{4}$$
$$10^{p+q} \text{を求める．} \tag{5}$$

ここで，ステップ (1)，(2) にあたる部分，すなわち**「正の実数 M が与えられたときに，$M = 10^p$ となる実数 p を見つける」という対応表があれば**，自分でする計算はステップ (4) の足し算の計算だけで済みます．ステップ (5) は再び対応表を使って求めることができるでしょう．

「正の実数 M が与えられたときに，$M = 10^p$ となる実数 p を見つける」対応表が，常用対数表といわれるもので，教科書の巻末に載っています．表の見方は図 3 のようにします．

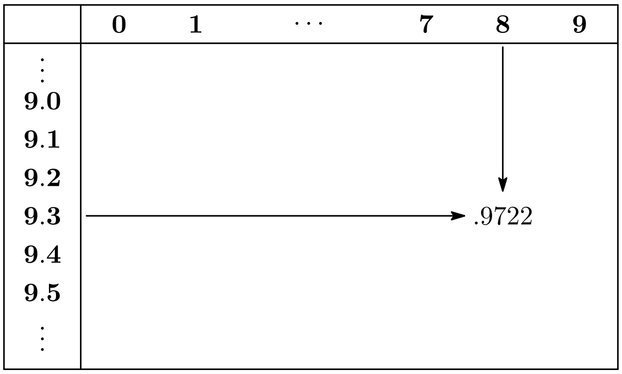

図 3: $9.38 = 10^p$ としたときの p の値を対数表から読む方法

$9.38 = 10^p$ としたときの p の値を表から読み取るには，まず，表の左端に書かれている数値を見て 9.38 の小数第一位までにあたる 9.3 の行を探します．次に，上に書いてある数値を見て 9.38 の小数第二位である 8 の列を探します．これらの行と列の交点に来る数値が，求めるものです．今の場合，$9.38 \fallingdotseq 10^{0.9722}$ であることがわかります（ここで，表から得られた数値は近似値です）．

問題 5.1. $7.42 = 10^q$ となるような実数 q を，教科書巻末の常用対数表から求めよ．

そろそろ，毎回「正の実数 M が与えられたときに，$M = 10^p$ となる実数 p」というような言い方をするのが面倒になってきました．そこで，これを手短に書き表す記号を導入しましょう．

定義 5.1. 正の実数 M が与えられたときに，$M = 10^p$ となる実数 p のことを，10 を底とする M の対数といい，記号で $\log_{10} M$ と書く．

一般に，$a > 0, a \neq 1,$ に対して，$M = a^p$ となる実数 p のことを a を底とする M の対数といい，記号で $\log_a M$ と書く．

この定義からわかるように，「$\log_a M = p$ である」ということと，「$a^p = M$ である」ということとは同じ内容を表しています．これを通常の文章で言えば，「a を p 乗すれば M になる」ということを表しています．したがって，「$\log_a M$ の値はいくらか.」という問は，「a を何乗すれば M になるのか.」という問いかけと同じです．

問題 5.2. 次の値を求めよ．

(1) $\log_3 \sqrt{3}$

(2) $\log_2 \frac{1}{8}$

問題 5.3. 対数表を使って次の値を小数第四位まで求めよ．

(1) $\log_{10} 3.14$

(2) $\log_{10} 8.29$

6 計算例

6.1 掛け算・割り算

前節で挙げた例 9.38×7.42 を実行してみましょう．

$$9.38 = 10^p \text{となるような } p = \log_{10} 9.38 \fallingdotseq 0.9722 \quad \text{（対数表より.）} \tag{6}$$
$$7.42 = 10^q \text{となるような } q = \log_{10} 7.42 \fallingdotseq 0.8704 \quad \text{（対数表より.）} \tag{7}$$
$$9.38 \times 7.42 = 10^p \times 10^q = 10^{p+q} \quad \text{（指数法則より.）} \tag{8}$$
$$p + q \fallingdotseq 0.9722 + 0.8704 = 1.8426 \quad \text{（筆算で計算.）} \tag{9}$$
$$10^{p+q} \fallingdotseq 10^{1.8426} = 10^{1+0.8436} = 10 \times 10^{0.8426} \fallingdotseq 10 \times 6.96 = 69.6 \tag{10}$$

最後の (10) で，$10^{0.8426}$ が約 6.96 であることを求める際に，対数表を先ほどとは逆向きに利用しています．表の内部に .8426 が現れるところを探すと，6.9 の行の 6 の列にある事がわかり，そこから読み取れます．

直接掛け算をすれば，正確な答えは 69.5996 となります．ここに挙げた例だけでは，計算機のない時代に対数計算がなぜそれほど重宝されたのか，十分には理解しがたいかもし

れません．三桁の計算程度なら掛け算を筆算でしてもそれほどの手間はかからないように見えます．しかし，これが四桁，五桁と大きな数を扱うにつれて，足し算にかかる手間の増え方に対して，掛け算にかかる手間の増え方は格段に大きいのです．これについては後の問題で考えてみてください．

問題 6.1. 割り算 $9.38 \div 7.42$ を，上の例と同様に指数法則を利用して計算せよ．

問題 6.2. 通常の筆算で計算する場合，次の問に答えよ．

(1)　三桁の数どうしの足し算を筆算でするとき，その過程で，一桁の足し算を少なくとも何回行う必要があるか．また，三桁の数どうしの掛け算を行うとき，その過程で，一桁の数どうしの掛け算を少なくとも何回行い，一桁の数どうしの足し算を少なくとも何回行う必要があるか．

(2)　四桁の数どうしの場合に上と同じ問題を考えよ．

(3)　一般に n 桁の数どうしの場合にはどうか．

6.2　累乗

指数法則を利用した計算の例をもう一つ挙げる．指数関数について学んだときに，2 倍 2 倍を繰り返すという例について考えた事がある．例えば細胞分裂のように一定時間毎に 2 倍に増加する現象などである．

このような倍々の増加を 30 回繰り返し，例えば 2^{30} 倍になったとしよう．いったい 2^{30} とはどれくらいの大きさなのだろうか．正直に計算すれば，2^{30} を求めるには 29 回の計算が必要である．正確な値ではなく，大雑把に何桁の数になるかだけを知ろうと思えば，対数表を使って計算の回数を大幅に減らす事ができる．

方針は次のようなものである．私達は十進法で数値を書き表しているので，桁数を知りたければ 10 の累乗の形に表してみればよいだろう．そこで対数表を利用する．

$$2 = 10^p \text{となるような } p \text{ を求める．} \log_{10} 2 = 0.3010 \quad \text{（対数表より．）} \tag{11}$$

$$2^{30} = (10^{0.3010})^{30} = 10^{0.3010 \times 30} = 10^{9.030} \tag{12}$$

$$\text{したがって，} 10^9 \leqq 2^{30} < 10^{10}, \text{よって } 2^{30} \text{ は } 10 \text{ 桁である．} \tag{13}$$

問題 6.3. 3^{20} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

問題 6.4. 6^{10} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

問題 6.5. 0.5^{30} において，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか．

7　例を吟味する—対数計算の公式

前節で具体的な数値を例として行った計算を，一般的に M や N とおいてもう一度繰り返し，そこで起きている事をよく見てみよう．そうすれば，そこから対数の性質（それは指数法則が姿を変えたものにすぎないが）が自然に導かれてくることがわかる．

2 つの正の実数 M，N の掛け算の，対数を用いた計算を再度眺めよう．

$$M = 10^p \text{となるような実数 } p \text{ を求める．すなわち}, p = \log_{10} M \tag{14}$$

$$N = 10^q \text{となるような実数 } q \text{ を求める．すなわち}, q = \log_{10} N \tag{15}$$

$$\text{このとき}, M \times N = 10^p \times 10^q = 10^{p+q}. \tag{16}$$

この最後の行は，対数を用いて書けば $\log_{10}(M \times N) = p + q$ となる．ここに，(14)，(15) を代入して，次の等式を得る．

$$\log_{10}(M \times N) = \log_{10} M + \log_{10} N. \tag{17}$$

底として 10 を用いてきたが，他の底でもまったく同様にこの性質が成り立つ事を示す事ができる．また，割り算について同様の考察から，次の性質が導かれる．

$$\log_{10}(M \div N) = \log_{10} M - \log_{10} N. \tag{18}$$

次に，2^{30} の桁数を求めた時と同様に M^r の桁数を求める計算を書き，それを対数の記号を使って書きなおしてみよう．方針は，十進法のもとでの桁数を求めたいのだから 10 の累乗の形にすれば良い，というものであった．

$$M = 10^p \text{となるような } p \text{ を求める．すなわち}, p = \log_{10} M. \tag{19}$$

$$\text{このとき}, M^r = (10^p)^r = 10^{pr}. \tag{20}$$

この最後の行は，対数を用いて書けば $\log_{10} M^r = pr$ となる．ここに (19) を代入して，次の等式を得る．

$$\log_{10} M^r = r \log_{10} M \tag{21}$$

もちろんこの性質も，底は 10 に限らず正の数 a に対して成り立つ．

問題 7.1. 対数の性質 (18) を導け．

問題 7.2. 対数表を用いて，次の値を求めよ．

(1)　$\log_{10} 356$

(2)　$\log_{10} 0.0123$

(3)　$\log_{10} 7^{20}$

8 桁数を求める例の再吟味—底の変換公式

再度，2^{30} の桁数を求める計算例について考える．

$b = 2^{30}$ と置く．2^{30} という形に表されているということは，言い換えれば b の 2 を底とした対数がわかっているということである．すなわち，$\log_2 b = 30$．b を 10 の累乗の形に書き換えるということは，言い換えれば b の 10 を底とした対数を求めるという事である．桁数を求める計算の中に，底の変換という問題意識が現れる．

一般に，正の数 b が $b = a^r$ と表されているときに，別の正の数 c を底として c^q と書き変える計算を，前節の例をなぞりながら書いてみよう．

$$b = a^r \text{である．したがって,} r = \log_a b. \tag{22}$$
$$a = c^p \text{となるような } p \text{ を求める．すなわち,} p = \log_c a. \tag{23}$$
$$\text{このとき,} b = a^r = (c^p)^r = c^{pr}. \tag{24}$$

最後の行は，$\log_c b = pr$ であることを表している．これに (23),（22）を代入すれば，次の等式を得る．

$$\log_c b = \log_c a \times \log_a b \tag{25}$$
$$\text{あるいは,} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \tag{26}$$

(26) 式の左辺は底が a の対数であり，右辺は分母分子ともに底が c の対数である．これを底の変換公式という．

問題 8.1. $\log_{10} 2 = p$ と置く．次の対数を，p を用いて表せ．

(1) $\log_2 10$

(2) $\log_5 2$

9 その後の発展—対数計算法から対数関数へ

以上，主に計算法の工夫という視点から対数を取り上げてきた．16 世紀にスコットランドの人ネピア（Jhon Napier, 1550–1617）によって作り上げられた対数は，のち微分積分法の発展とともに対数関数として，数学の中で重要な役割を果たすことになる．

参考文献

[1] 志賀浩二『数の大航海　対数の誕生と広がり』日本評論社，1999.

（深川久　最終更新日：1999 年 12 月 31 日）