数 e について

1　自然対数の底 e

教科書では，数学 III の微分法の章で，対数関数の導関数を求める際に自然対数の底 e という数が導入される。そこでは，e は次のように定義された。

$$e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

これはまた，n を自然数とし，$t = \dfrac{1}{n}$ とおくことにより，次のようにも書けた。

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

（右辺の収束は認めて）これが定義だ，といってしまえばそれまでで，とりあえず微分計算はできるのだが，毎年一人二人の生徒に後から聞かれることがある。「ところで，e って何なんですか？」上の定義を書いて説明しようとしても「いや，その式は知ってるんですが，たとえば円周率なら円の直径と周の長さの比，とか意味があるじゃないですか。で，e って何なんですか？」と聞き返される。

ここでは，数 e の定義式の意味を具体的に解釈することを試みよう。

2　指数的に変化する現象から派生した問題

ある一定の時間が経てば一定の倍率を掛けた値に増減する，という変化の仕方をする量が自然や社会の中に存在する。たとえば，一定時間で 2 倍に増殖するバクテリアや，一定時間で半減する放射性同位元素，一定期間で定められた利率の利子が複利でつく預金や借金，などである。

このような現象の代表として，以下では複利計算をとりあげる。複利計算というひとつの例を扱いながら，その背景にある指数的に変化する現象に共通の性質を調べたい。

問題 2.1. 利率年利 100%[*1]で，1 年毎の複利計算で利息をとられる借金をした。始めに 1 万円借りて返済せずほっておいたとき，10 年後には借金はいくらになっているか。

1 年経った時点で利息を計算し，その利息を元金に繰り入れる時，利息の繰り入れ期間は 1 年である，ということにしよう。半年経った時点で，年利率の半分（上の問題では 50%）の利息を計算して元金に繰り入れるならば，利息の繰り入れ期間は半年である。

複利計算で利息の繰り入れ期間は，半年毎・1 か月毎・1 日毎などいろいろ考えられる。

年利 r%，利息の繰り入れ期間 $\dfrac{1}{n}$ 年の複利計算で 1 年間の借金をする（もしくは預金をする）とき，1 年後の借金総額（預金総額）は，$\dfrac{1}{n}$ 年ごとに $\dfrac{r}{n}$% の利息を計算して元金に繰り入れ，その額を新しい元金として次の $\dfrac{1}{n}$ 年がたてば $\dfrac{r}{n}$% の利息を計算して元金に繰り入れ，という操作を 1 年経つまで繰り返したときの最終的な額である。

問題 2.2. 次の問いに答え，それぞれの結果を比較せよ。

(1) 年利 100%，利息の繰り入れ期間 1 年の複利計算で 1 万円の借金をした。1 年後の借金は利息込みでいくらか。

(2) 利率年利 100%，利息の繰り入れ期間半年の複利計算で 1 万円の借金をして，1 年間そのままにしておいた。1 年後の借金は利息込みでいくらか。

(3) 利率年利 100%，利息の繰り入れ期間 3 ヶ月の複利計算で 1 万円の借金をして，1 年間そのままにしておいた。1 年後の借金は利息込みでいくらか。

[*1] 年利率 100% という数値は，以下の計算をできるだけ簡単にするために選んだものである。いったん，簡単な数値で原理をつかんで理解すれば，個々の値を変更するのはたやすい。

この問題 2.2 の結果をみると，1 年間を n 等分して，利息の繰り入れ期間を $1/n$ 年にとり，その期間で $\dfrac{100}{n}\%$ の利息がつく複利計算で 1 年間ほっておいたときの借金の元利合計を求めてみると，その額は分割の数 n を増やすほど増えるようである。

これらの状況から，次の疑問が浮かぶ。

疑問

> 1 年間をどんどん細かく分割して利息の繰り入れ期間を短くしたとき，複利計算による 1 年後の元利合計は，どの程度まで増えるのか？限りなく増えつづけるのか，それとも，一定の上限が存在するのだろうか。

この疑問に答えるため，問題 2.2 で考えた状況を押し進めて，次の問題を考えよう。

問題 2.3. 利率年利 100%，利息の繰り入れ期間 $\dfrac{1}{n}$ 年の複利計算で a 万円の借金をして，1 年間そのままにしておいた。1 年後の借金を a と n を用いて表せ。また，その額は最初に借りた額の何倍になっているか。

上の問いの答えと e の定義を見比べてみれば分かるように，この倍率において n を限りなく大きくしたときの極限値が数 e である。利息の繰り入れ期間をどんなに短くし，1 年間をどんなにこまかく分割して複利計算しても，1 年後の元利合計は始めの元金の e 倍を超えることはない。そのような限界を与える数が e である。これが，自然対数の底 e の定義式の，ひとつの解釈である。

では，この「倍率の限界」を与える e の具体的な値はいくらぐらいになるのか。次節ではこれを考えよう。

3　数 e の近似値

前節では，数 e の定義式 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の 1 つの解釈について述べた。ここでは，具体的数 e の値がどれくらいになるかを考えてみよう。

教科書では，定義式 $e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ を用い，$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の値をいくつかの t に対して計算した結果を表にし，t の値が 0 に近づくほど $2.718\cdots$ という値に近づいていく様子を示してある。その表によれば，$t = 0.0001$ のとき，$(1+t)^{\frac{1}{t}} = 2.718145\cdots$ となるらしい。しかし，$t = 0.0001$ のとき $\frac{1}{t} = 10000$ であり，1 万乗を自分で計算して確かめるわけにはいかない。

ここでは，これとは別の方法で，もうすこし手に負える計算で e の近似値をつかむことを考えよう。以下に述べるのは厳密な証明ではないが，e の値がおよそ 2.7 であることを納得する助けにはなるだろう。

数 e の定義式として $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を用いる。

問題 3.1. 二項定理を用いて，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を展開せよ。$n \to \infty$ としたときの様子が予想できる程度にまで式変形してみよ。

問題 3.1 に答えてみれば，次のようになるだろう。

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right) + {}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

ここで，$n\to\infty$ のときの極限をとったものが e である。n を限りなく大きくしていったとき，展開式の項の数は限りなく増えていく。また，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，$\cdots$ などの値は 0 に収束する。これらのことから，次の関係が成り立つのではないかと期待される。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

これは，右辺の級数が収束するかどうかなど，**証明を要すること**である。しかし，ここでは上の議論程度に留めておき，この結果をみとめて，e の近似値を計算してみよう。

問題 3.2. 上の式の右辺の部分和である。計算してみよ（電卓を使ってよい）。

$$1+1=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=$$

この級数は，$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ で $t\to 0$ とするよりもずっと収束がはやい。上の計算程度でも，e のおよその値が $2.7\cdots$ であることが予想されるだろう。

4　指数関数 e^x

前々節では，複利計算の利息繰り入れ期間を $\dfrac{1}{n}$ 年にし，1 年後に借金が何倍になっているかを考え，その倍率の極限が数 e であることを見た。ここで，n を大きくしていったときの複利計算による元利合計金額の値の変化の様子をグラフにしてみよう。

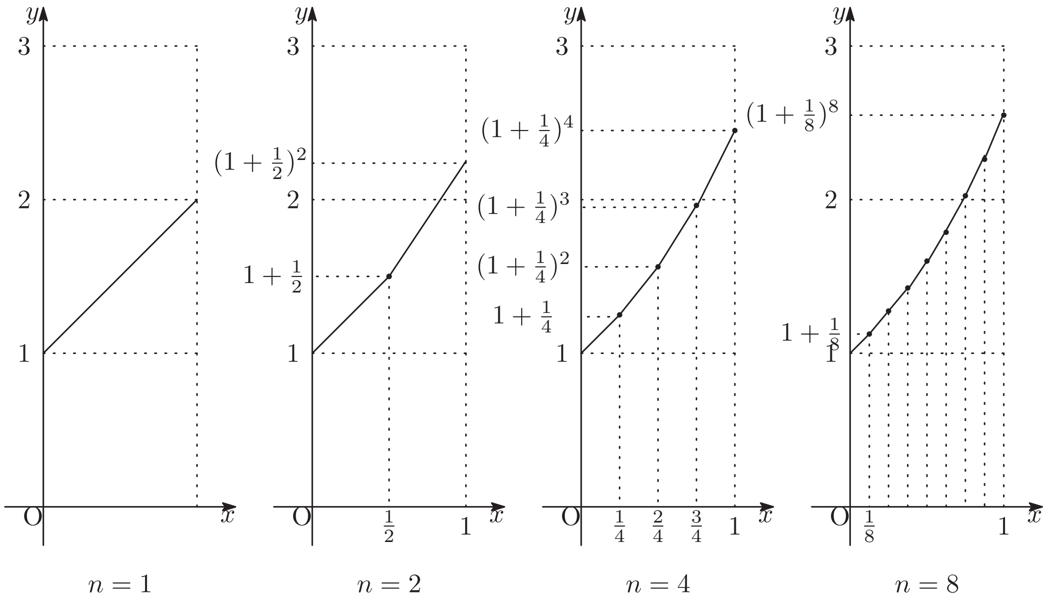

図 1: 利息繰り入れ期間を $\dfrac{1}{n}$ 年にしたときの元利合計の推移（単位は横軸：年，縦軸：万円）

図 4 のグラフでは，横軸に時間，縦軸に金額をとってある。

1 番左のグラフは，年利 100% で 1 万円の借金をしたとき，利息の繰り入れ期間が 1 年の複利という条件で，1 年後の元利合計がどうなるかを表している。最初の借金が 1 万円であるということを点 $(0, 1)$ で表し，1 年後には元利合計が 2 万円になるという事を点 $(1, 2)$ で表し，その 2 点を線分で結んで変化の割合を傾きで表現している。

左から 2 番目のグラフは，利息繰り入れ期間を半年としたもので，半年後には元金に 50% の利息を加えて 1.5 万円，1 年後にはこの 1.5 万円をもとに 50% の利息を加えて 2.25 万円になるという事を表現している。後半の半年の方が線分の傾きが大きくなっており，このことは後半の方が元利合計金額の増加した割合が大きいことを示している。

前々節で得られた結果をこのグラフで解釈すれば，ここで $n \to \infty$ としたときの極限として得られる曲線において，$x = 1$ のときの点（右端の点）の y 座標が数 e である。

問題 4.1. 図 4 の，左から 3 番目のグラフ（利息の繰り入れ期間が $\dfrac{1}{4}$ 年のもの）に関して，次の問いに答えよ。

(1) $x = 0$ のときの y の値，および，$x = 0$ から $x = \dfrac{1}{4}$ までの間の線分の傾きを求めよ。

(2) $x = \dfrac{1}{4}$ のときの y の値，および，$x = \dfrac{1}{4}$ から $x = \dfrac{2}{4}$ までの間の線分の傾きを求めよ。

(3) $x = \dfrac{2}{4}$ のときの y の値，および，$x = \dfrac{2}{4}$ から $x = \dfrac{3}{4}$ までの間の線分の傾きを求めよ。

(4) $x = \dfrac{3}{4}$ のときの y の値，および，$x = \dfrac{3}{4}$ から $x = 1$ までの間の線分の傾きを求めよ。

問題 4.1 の状況を一般化しよう。$x = 0$ から $x = 1$ までを n 等分し，利息の繰り入れ期間を $\dfrac{1}{n}$ 年として，各 $\dfrac{1}{n}$ 年の期間においてはその期間の初めの時点における元利合計金額に対して $\dfrac{100}{n}$% の利息がつくとしたとき，その様子をあらわす折れ線グラフを考える。$x_k = \dfrac{k}{n}$ とおき，$x = x_k$ に対応する y の値を y_k とする。$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{n}$，$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ とする（これらの記号が表す値を図に書いてみよ）。

問題 4.2. 上の記号のもとで，次の問いに答えよ。

(1) y_{k+1} を，y_k と n を用いて表せ。

(2) 点 (x_k, y_k) と点 (x_{k+1}, y_{k+1}) を結ぶ線分の傾きを y_k を用いて表せ。

問題 4.2 に答えると，次の関係式が得られる。

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x} = y_k$$

ここで，n を限りなく大きくし，図 4 の折れ線グラフがより細かい折れ線になっていったときの極限の状態を考える。このとき，折れ線の極限として得られる曲線をグラフに持つような関数を考えることができる。それを $y = f(x)$ としよう。上の関係式で $\Delta x \to 0$ のときの極限をとることによって，関数 $y = f(x)$ について次の関係式が得られそうだと予想される。

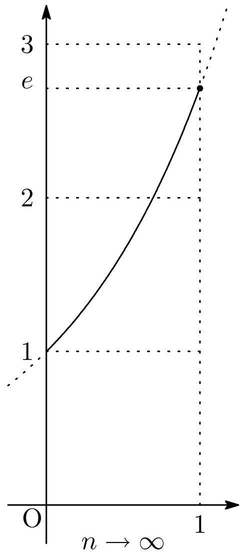

図 2: 折れ線の極限

$$\frac{dy}{dx} = y$$

ほんとうは**証明の必要なこと**なのだが，ここでは直観的な把握と予想にとどめておく。この関係式は，$f'(x) = f(x)$，すなわち微分しても変わらない関数，ということを表している。また，この関数は，$x = 0$ において値 $f(0) = 1$ をとる。

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1$$

このような関数 $f(x)$ の，$x = 1$ における値が e である，というのが第 2 節で得られた結果に他ならない。実は，この関数が指数関数 $f(x) = e^x$（の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分）である。微分に関する性質や $x = 1$ における値が e であることなど，すべてつじつまが合う。

このように，等比数列の考え方や二項定理など，これまでに学んだ知識を使いながら第 2 節で設定した疑問を追いかけると，自然に数 e や指数関数 e^x が現れてくる。

参考文献

[1] 小杉肇「e の数学」，恒星社厚生閣，1989.
[2] E. マオール「不思議な数 e の物語」，岩波書店，1999.

（深川久　最終更新日：2003 年 7 月 28 日）