平面図形を高校数学の中にどう位置付けるか

深川　久

大阪府立豊中高等学校教諭
専攻：数学，学校教育学
趣味：囲碁，読書

1　数学 A「平面図形」をどうみるか

高校においても，今年度入学生より改訂された学習指導要領にもとづく授業が始まった。今回の指導要領は，内容の配分の面からは，小学校中学校段階での削減と高校卒業時の水準は大きくは変えないという要請の綱引きによって前に軽く後ろに重い構成になっているといえる。この前に軽く後ろに重い構成は，高等学校内部においても，また，中学高校を通じてもいえる傾向である。

量的な多寡の面だけに留まらず，年齢に応じた生徒の関心のありようと学習内容のバランスという側面や，学習内容相互の関連性という側面からも，幾つかの疑問点が浮かんでくる。数学 A の「平面図形」として移行してきた三角形や円の性質，数学 I の「図形と計量」に移行してきた相似な図形の面積比・体積比に関する事柄など，幾何的分野にそのような点が多い。

このような疑問点を前にしたとき，一方では，生徒の発達段階の面からも，数学的内容相互の関連性という面からも，より適切なカリキュラムを小中高を通じて再構成するという問題意識が生まれる。他方，現にこの指導要領のもとでの学習経験を積んで高校に入ってくる生徒に対してそこで何をするべきか，という問題意識も同時に生まれる。

この二つの問題意識はともに重要なものであるが，本稿では後者について考察する。特に，高校教師にとって指導経験の乏しい数学 A「平面図形」を高校数学全体の中にどう位置付けるかという点に焦点をあてた議論を展開したい。

そのために，数学 A「平面図形」という単元だけをとりだして対象とするのではなく，数学 I，A，II，B，III，C 全体に点在する幾何的内容の相互関係に検討を加える。高校数学の中の幾何を一つの流れとして捉えつつ平面幾何をその中に位置付けることを本稿の目的とする。

2　高校数学における幾何の流れ

図 1 は，高校 3 年間の学習内容の中から幾何的内容を拾い出し，それらの関連を図にしたものである。実線か破線か，線が太いか細いかは，その線によって表される関連が，どの程度高校数学の中で強調されているかを表している。以下，この図に沿いながら，幾何的内容の流れについて検討する。

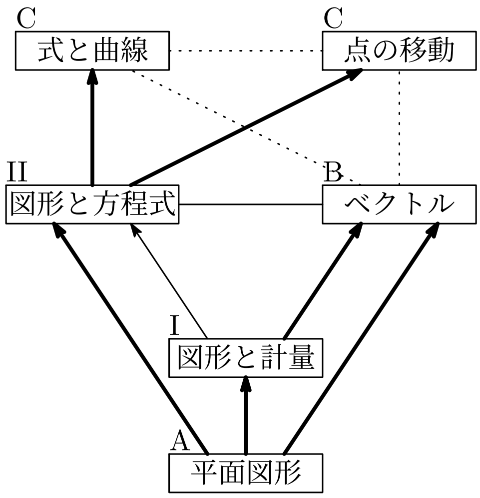

図 1: 高校数学における幾何

⟨1⟩ 「平面図形」と「図形と計量」（図 1-　）

数学 A「平面幾何」で扱われる図形の性質は，長さや角の具体的な値によらないものが多い。線分をある比に分ける分点や，中線や，角の二等分線など，長さや角の値自体よりも，それらの比によって表される性質が主に取り上げられる。そこでの結果は，大小の比較（例：三角形の辺と角の関係）や，一致（例：三角形の 3 本の中線は一点で交わる）であることが多い。また，図形の位置関係（例：円と直線が接する，三角形の外接円，四角形が円に内接する条件）もこの「平面図形」で扱われる。

これに対して「図形と計量」においては，角と長さを測ることが直接扱われる。正弦定理・余弦定理はいずれも三角形の辺の長さと内角の関係を表している。三角形の 3 辺の長さと 3 つの角の大きさのうち，既知のものから未知のものを求めることや，三角形の 3 辺の長さから面積を求めることが，図形と計量での主題の一つとなる。

このような特徴を備えた「平面図形」と「図形と計量」のつながりを見るために，例として，正弦定理（数学 I「図形と計量」）をとりあげよう。正弦定理は，「平面図形」にあらわれる三角形の辺と角の大小関係（大きい辺に対する角は，小さい辺に対する角より大きい。大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい）を，より定量的に精密化したものとみなすことができる。その証明方法は，図 2 に示すとおりである。この証明では，まず与えられた三角形に外接円を描き，次に一つの円弧に対する円周角はすべて同じ大きさであることを用いて三角形をとりかえ，最後に直径上の円周角は直角であることを使って三角比の定義につなげる。

この証明では，三角形をとりかえるところが中心的な着想である。ひとつの内角 A とその対辺の長さ a の関係を調べようとしているのだから，それらの値さえ変化しなければ三角形を変形してもよい，という発想がすばらしい。初めは三角形が与えられていて，そこに外接円を描く。決して先に円を描いてその中に三角形を描くのではない。しかし，いったん外接円が描かれたら，今度は円を固定して，三角形の頂点を円にそって動かすのである。これらの着想・視点の切り替え・そのとき何が不変であるかを的確に捉えることができるためには，平面図形の性質にかなり馴染んでおくことが必要であろう。なるほど，外接円などその場で説明すればそれほど時間のかかるものではないかもしれない。しかし，単に言葉を知っているかどうかではなく，物を手にとって触るように図形を扱うことができるかどうかが問題である。この意味で，中学校から移行した外接円を扱う「平面図形」は，「図形と計量」の理解にとって重要な前提となるだろう。また高校における「平面図形」は，そのような意味を持つものとして扱う必要があると考える。

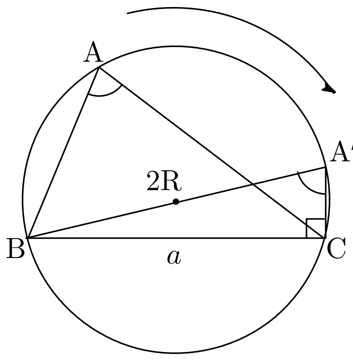

図 2: 正弦定理

もう一つ，「平面図形」と「図形と計量」のつながりを示す例をあげる。「平面図形」ではじめて内心を扱う。内接円が存在することがこれによって示される。「図形と計量」では，三角形の

3辺の長さが与えられたとき，余弦定理を使って面積を求める。これを組み合わせて，内接円の半径を求めるというおなじみの問題がある。これは,「一つの値（三角形の面積）を二通り（余弦定理を利用したものと内接円の半径を利用したもの）に表現し，それらが一致するということから情報（内接円の半径の値）を取り出す」という数学における非常に利用価値の高い一般的な考え方が極めて明快に姿を表す問題である。「平面図形」と「図形と計量」両単元の間の捨てがたい関連性が見て取れる。

以上のように，これらの両単元は密接に関連し合っている。特に「平面図形」は「図形と計量」の前提としての意味を持つ。

⟨2⟩「平面図形」と「図形と方程式」（図 1- ）

「平面図形」では，図形それ自体をそのまま扱う。それに対して,「図形と方程式」では，座標を導入し方程式を用いて図形を調べる。座標の導入によって，直観的把握に向いている幾何的特徴と，一定の手順に沿った計算によって正確な結果が出せるという代数的特徴のそれぞれの利点を生かすという，数学にとって大きな意義のある橋渡しがなされる所である。

ここで重要なのは,「それぞれの利点を生かす」という点である。決して，図形そのものを見ることを捨てて座標計算へ移行するのではない。ところが，線を引いたり角を測ったりしながら図形そのものを扱うことが十分になされないまま座標平面による扱いを形式的に受け入れると，この「それぞれの利点を生かす」というアイディアが理解されず，分点の座標の計算法や重心の座標の計算法だけが，図形的直観と切り離された形で受け入れられかねない。

数学 A「平面図形」で重心を扱う際には，頂点と対辺の中点を定規で結んで確かに3本の線分が一点で交わることを確かめさせたい。こうしてできた重心がそれぞれの線分を 2：1 に内分している，というように，平面図形の性質の多くは線分の長さの比を用いた形で表現される。このような直観的背景を十分に養って，分点を考えることが自然であると感じられるようになれば，数学 II「図形と方程式」で座標平面へ移ったときに内分点・外分点の座標を計算で求めることを唐突に感じることもなくなるだろう。これまでは，図形そのものを初等幾何的に扱う部分は中学校の学習内容として，高校では前提とされていた。その部分の一部が中学校から高校へ移行した今，座標導入以前に図形そのものを初等幾何的に扱う部分から座標幾何への橋渡しをより意識的に行うことが必要だと考える。ここで平面図形を軽視すると，重心を知らずに重心の座標だけが計算できる生徒，分点の位置が図の上で示せないのに分点の座標だけは計算できる生徒を増やすことになりかねない。

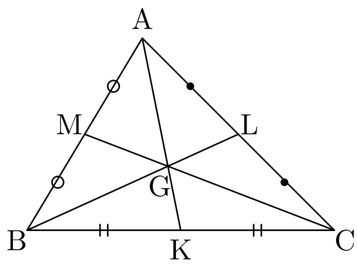

図 3: 三角形の重心

平面図形は，座標導入後の図形の扱いに対して図形的直観という大切な基礎を提供する。この図形的直観の上に立って，座標を用いた解析幾何的方法への橋渡しをていねいに行うことが重要である。

⟨3⟩「平面図形」と「ベクトル」（図 1- ）

前の指導要領から，ベクトルは図形の性質を調べるための幾何ベクトルとしての扱いが中心になっていた。このような扱いにとって，三角形の性質を調べることは基本的重要性を持つ。

「図形と方程式」における xy 平面が直交座標であるのに対して,「ベクトル」で三角形を扱う際の，頂点の一つを基準にとり残りの 2 頂点の位置ベクトルを用いてその他の点の位置ベクトルを表すという考え方は，より自由な座標系の導入と考えることができる。図形的な直観を保存しながら計算にのせる事が可能であるという点で，直交座標に限定した座標平面での図形の扱いよりも自然である。

「平面図形」で初等幾何的に三角形を扱い，内分・外分を扱う。これだけの道具があれば，分線上の内分点によって三角形の内部を表現し，また外分点によって徐々に世界を三角形の外に広げていくことができる。この方向を推し進めれば，やがて平面全体を表現する斜交座標の考えに至る。このとき，三角形は斜交座標の枠組みを決定する最も基本的な図形として再認識される。これは，2 つの独立なベクトルを用いて平面上の点を表すことと同じである。

このように,「平面図形」は自然に「平面ベクトル」の図形への応用を中心とした扱いにつながるのである。

したがって，数学 A「平面図形」で三角形の性質や，内分・外分などの扱いに通じておくことは，数学 B「ベクトル」を学ぶための重要な基礎固めとなる。

$\langle 4 \rangle$ 「図形と計量」と「ベクトル」（図 1-　）

計量，すなわち長さと角を問題にする単元が「図形と計量」である。実際には，この単元の内容は三角比がその大部分を占める。三角比に対する理解は，余弦定理を通じてベクトルの内積につながり，ベクトルの大きさや 2 つのベクトルのつくる角へとつながっていく。

生徒は，ベクトルの内積の定義が唐突であると感じることが多い。余弦定理と内積の関連を，より明確に意識した扱いが必要である。

たとえば次のような扱いが考えられる。直角三角形に対する三平方の定理 $c^2 = a^2 + b^2$ と一般の三角形に対する余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ を併置し，余弦定理が三平方の定理の一般化であること・三平方の定理が余弦定理において $\theta = 90^\circ$ の特別の場合であることを押さえる。その上で両者を比較して $-2ab\cos\theta$ にあたる部分がいわば「直角三角形からのずれ」を表していることを指摘する。ここから定数倍の部分を除いて $ab\cos\theta$ を重要な量として取り出す，という手順で内積の定義につなげるのである。

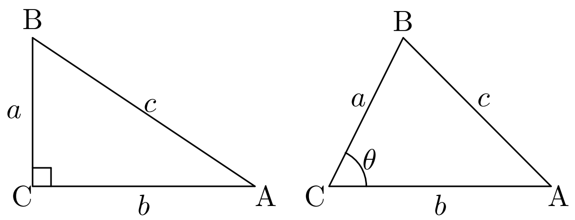

図 4: 三平方の定理と余弦定理

余弦定理および内積の定義を仲立ちにして，距離と角とは本質的に結びついている。ここは大切にしたい結節点である。またここに,「平面幾何」で扱った三角形が計量を伴いベクトル間の関係に姿を変えながら幾何の流れの中で常に重要な役割を担っている様を見て取ることができる。

$\langle 5 \rangle$ 「図形と計量」と「図形と方程式」（図 1-　）

「図形と計量」の主題は長さと角であり，それらを三角比を通して取り扱った。「図形と方程式」における長さと角の扱いは次のようになっている。長さは三平方の定理を用いて 2 点の距離の公式を作り利用する。角については平行・垂直という特別の場合以外はあまり表面に現れてこない。座標平面上で直線のつくる角を扱うには，たとえば正接の値が直線の傾きであることが基本的であるが,「図形と計量」で正接を定義した際には触れられるものの,「図形と方程式」

ではとりあげられていない。

すなわち，座標軸が直交している為に距離を考えるには三平方の定理で足り，また，角を考えるには直交座標の利点はさほど大きくなく，そのためあまり触れられない。このような意味で，「図形と計量」と「図形と方程式」のつながりは高校数学の中では見えにくくなっている。図 1 において，そのような意味でこの関連は細い実線で描いた。もっとも，このことは数学的に計量と座標平面のつながりが薄いことを意味するのではない。

⟨6⟩ 「図形と方程式」と「ベクトル」（図 1- ）

この 2 領域は，高校数学における幾何の流れの中では，次のように位置付けることができる。数学 A「平面図形」，数学 I「図形と計量」では，図形そのものをそのまま扱った。それに対して，図形を何らかの意味で代数的な計算に乗せるため，座標系の導入を行うのが上の 2 領域である。

「図形と方程式」では直交座標が導入され,「ベクトル」では扱う平面図形に応じて独立な 2 ベクトルをうまく選び，用語は使わなくとも実質的に斜交座標を導入する。

数学 II と数学 B は互いに他を前提としていないが，両方を学ぶ場合にはこの関連を大切にしたい。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において s，t を一定の条件のもとに動かしたときに終点 P の動き得る範囲を考える問題など，座標平面における不等式の表す領域との関連を理解することが最も近道であると考える。

逆に，斜交座標という見方から振り返って，座標平面をその特別な場合・直交する単位ベクトルを用いた座標系として捉えることも，座標に対する理解を深めるだろう。もちろん，ベクトルがなければ座標が扱えないというわけではない。その意味で，この部分の関連は図 1 には細い実線で描いた。しかし，両者の関連は意識しておきたい。

幾何の観点からは，数学 I，A と数学 II，B の間で一つの山を越える。それは（関数のグラフを描くために留まらず，図形を扱う為の）座標系の導入である。この山を確かに越えていくためにも，座標系導入以前に図形そのものをよく見ながら平面図形に親しんでおくことが重要である。

⟨7⟩ 「図形と方程式」と「式と曲線」（図 1- ）

「図形と方程式」では直線と円を中心に扱ったが，式と曲線では，2 次曲線およびその他の媒介変数表示された曲線を扱うことになる。生徒は，直線の方程式はたいてい 1 次関数のグラフとして認識している。また円の方程式は，中心からの距離が一定という定義と方程式の形が比較的容易に結びつく。これらに対して，円以外の 2 次曲線では最終的に整理された曲線の方程式の形から意味が読み取りにくく，そもそもその方程式が図形をあらわしているとはどういうことかという最も根本的な事柄の理解がぐらつきはじめる。

図形を，条件を満たす点の集まりとして捉え，その条件を座標の間の関係式として書き表すことで図形が方程式で表現されるという基本事項の理解が，直線と円に限らず様々な曲線の方程式へと射程を延ばしたときに試されるのである。

その意味でも，数学 I，A と II，B の間にある山，図形そのものを扱う「平面図形」から，座標で表現する「図形と方程式」への橋渡しを適切に行い，この山をしっかりと乗り越えておくことが，後々まで良い影響を及ぼすことにつながるだろう。

これらに加えて，媒介変数表示を用いたいろいろな曲線を扱うところでは，曲線自体の最初の定義が幾何的な性質をもとに行われる。たとえば，直線上や円の内外を転がる円上の点の軌跡として定まるサイクロイドなどである。円と

直線の平面幾何は，数学のいたるところで基本的な役割を果たす。

⟨8⟩ 「図形と方程式」と「点の移動」（図 1-　）

今回の指導要領の改訂で，点の移動が復活した。ここでの点の移動の扱いは，移動後の点の座標を移動前の座標で表したときに x，y の同次 1 次式になるような場合，行列を用いて表現できることの理解が中心である。また，行列の積と移動の合成，移動前の点を求めるために逆行列を利用すること，などが扱われる。

授業で扱うにあたって意識しておくべきは，このような代数的に洗練された表現方法に移る以前に，具体的な平行移動，対称移動，回転移動などを図形そのものに即して見ることにどれだけ生徒が馴染んでいるか，という点だと考える。

図 5 は，不等辺三角形を平面上で移動した様子である。移動前と移動後の三角形をしめしている。

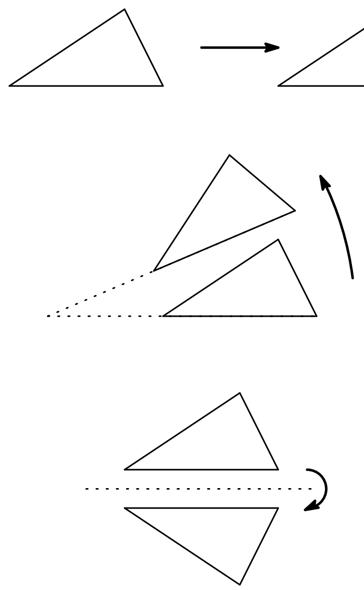

図 5: 図形の移動

この図を見れば，それぞれの移動の特徴がわかる。言葉が添えられていなくても，一番上が平行移動・次が回転移動・一番下が直線に関する対称移動と読み取ることができる。仮に図の中の点線や矢印がなかったとしても，読み取ることができるだろう（平面上の等長変換は，一般の位置にある 3 点の像によって決まるという数学的結果が背景にある）。それに対して，移動前・移動後がそれぞれ 1 点であったとしたら，前後を見比べてそれがどのような移動によるものかを判断することはできない。

図形そのものを扱う初等幾何的な方法から，図形を点にまで分解し，点を座標で表し，ある方程式を満たす座標を持つ点の集まりとして再び図形に戻ってくるという一連の過程を経て，解析幾何的に図形を式で調べることができるようになった。この一連の過程の後半部分にのみ注目する立場からは，点の移動のみの扱いで留めることはすなわち基本的な易しい部分にのみ留める事として見えるのだろう。しかし，前半の過程を見るものの目には，点の移動だけをとりだして扱うことは，三角形の移動を扱う以上に認識しづらい事のように見える。もっと先まで扱うというのではなく，もっと根本にあるものを扱うという意味で，図形の移動という見方を大切にしたい。数学 C が一次変換に踏み込んでいないことよりも，中学校 1 年生から図形の移動が削除されていることの方を意識しておきたい。

⟨9⟩ 「ベクトル」と「点の移動」（図 1-　）

前節でも述べたように，今回の数学 C における点の移動は移動の前後の点の座標の関係式を行列で表現するに留まり，ベクトルとの関連・一次変換という見方は扱われていない。具体的には，移動の合成が行列の積に・逆の移動が逆行列に対応することは扱われているが，点の位置ベクトルのほうを足したり実数倍したりして，和が和に移ること・実数倍が実数倍に移ること（線形性）は扱われていない。行列の積が分配法

則を満たすことの記述はあるが，ベクトルをベクトルに写す行列という視点ではない。そういう意味で，ここは図１において点線にしておいた。数学としての関連が薄いということを意味するのではない。

⟨10⟩ 「式と曲線」と「点の移動」（図 1-　）

「式と曲線」では２次曲線が扱われる。「点の移動」で，図形を移動することは扱わないので，たとえば反比例のグラフを回転すれば直角双曲線の標準形と曲線として同じ形である，ということを回転移動の考えで導くことはできない。

図１の右上の点線で示した三角形に象徴されるように，今回の指導要領では，対称移動・回転移動などの変換という捉え方が弱くなった。変換の持つ役割の一つは，それを通して一見異なるように見えるものが実は同じであるということを示す事にある。

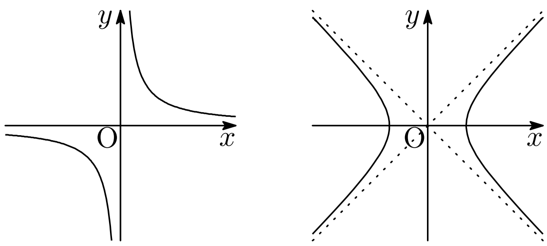

図 6: 直角双曲線

図６に示された直角双曲線は，45° 回転によって移りあう。曲線の方程式をみると $xy = 1/2$ と $x^2 - y^2 = 1$ であり，異なった式である。しかし，座標変換を施すと，互いに移りあう。

この図から座標平面を取り去って，曲線そのものを見比べれば，ちょっと頭をかたむけてみれば同じにみえる。図形自体に関心をもつ立場からは，両者を区別する理由はない。方程式の違いは，座標軸をどう引いたかによって引き起こされた違いである。図形そのものから座標平面と方程式を使った解析幾何的方法への橋渡しをおこなった際に持ち込まれた見かけ上の違いということになる。

幾何学の視点からは,「図形と方程式」に変換の考えを加えて初めて図形をよく表現しえたと言える。変換の考えが改訂ごとに後退していく指導要領のもとで，教える側はこのような数学的関連を意識しておいた方がよい。ないもののないことを嘆く為にではなく，あるものをよく扱う為に，必要な認識だと考える。

⟨11⟩ 「ベクトル」と「式と曲線」（図 1-　）

ここのつながりは，もう意識されないだろう。数学的には，ベクトルと一次変換という枠組みの中で，座標系を回転して２次曲線を標準形に変換するというつながりということになろうが，この視点はかつての「代数・幾何」が消えたときにすでに消えていた。

前指導要領では複素数平面上で変換を扱ったが，今回はそれも消えて点の移動だけが復活した。中学校以前でも中学１年で学習していた図形の移動が削除されている。全体に，中学高校の幾何から変換の視点が後退したと言うことができる。

先に，数学 I，A と数学 II，B の間には，幾何的側面から見たときに一つの山があると述べた。それは，図形そのものを扱う初等幾何的な方法と，座標系を導入した解析幾何的な方法との間の山であった。その次に越えるべき山があるとすれば，それは変換の幾何への山だろう。座標系のとりかたに依存する見かけ上の違いを取り除き，座標を利用しながらも図形そのものの性質を明らかにする為に，変換で不変な性質に注目するという方法論への第一歩である。かつては，第一の山は中学と高校の間にあり，高校在学中に第二の山への入り口に立った。これからは，第一の山に高校在学中に出会い，第二の山を意識することはまれになるだろう。

⟨12⟩ 数学 III と幾何的分野

図 1 には数学 III を含めていない。ここでは，数学 III と図形の関連を簡単に眺めてみる。

数学 III では，最初に数列の極限・級数の和・関数の極限などを学ぶ。極限計算の練習のみになりがちなこの分野にあって，図形的に定まる数列や級数がしばしば興味深い具体例を提供する。式が与えられて極限計算だけを練習するというのではなく，どのような極限計算を行うことが問題に答えることになるのかを考えて式を立てるような問題では，最初の状況設定が図形的になされることが多い。

また，数学 A「平面図形」で扱うことになった円の接線と弦のつくる角に関する定理をここで振り返るのも面白い。極限について学んだあと，この定理における接線と弦を円周角をつくる 2 弦の極限として捉える事で，直観的な再解釈を行うことも可能である。

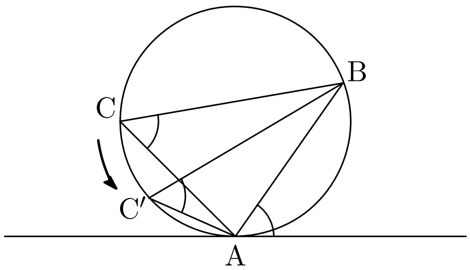

図 7: 接線と弦のなす角

最大最小問題・極値問題においても，図形的・幾何的事実を背景とした問題は多い。たとえば光が空気中から水中へと進むときに屈折する際の入射角と屈折角の関係を最短時間経路の観点から導く問題などはそれ自体興味深く，また過去入試問題としても何度も出題されているが，幾何学的直観に裏打ちされた見通しを頭の中に持つことは，計算遂行の大きな助けとなる。

解析的な分野であっても，図形的直観が理解の助けとなることは非常に多い。厳密さは他の方法で補うにせよ，図形的直観が数学の中で果たす役割は大きい。

3 結論

前節で各科目に分散した幾何的領域の間の関連を個別に検討した。その結果，以下の諸事実が明らかになった。高等学校段階で，図形そのものをそのまま扱う初等幾何的な方法から，なんらかの形で代数的な計算に乗せる座標系の導入（直交座標およびベクトルの利用）への橋渡しがなされること。「平面図形」から「図形と方程式」への展開において，幾何学的直観と方程式を用いた計算の利点を共に生かすというアイディアがよく理解されるかどうかが，その後数学 C「いろいろな曲線」に至るまでの幾何的内容を理解するための要となること。他方,「平面図形」における三角形の扱いは,「図形と計量」における三角比，余弦定理を経て「ベクトル」の内積へと繋がっていき，姿を変えながら幾何的分野で常に基本的役割を果たすこと。これら一連の系統に属さない場面でも，図形そのものに対する直観的理解は計算に意味を与える源泉の一つとして常に現れてくること。

いずれをとっても，平面幾何の重要性を示唆するものである。中学から高校に移行した平面図形は，中学までの図形的分野の到達点としてというよりも，むしろその後に続く幾何的領域への出発点として生かすことが大切である。その為にも，数学 A「平面図形」の中だけで捉えるのではなく，高校数学における幾何の流れを把握し，各科目に分散した諸項目の関連を理解してその中に「平面図形」を位置付けることが重要である。本稿が何かの参考になれば幸いである。