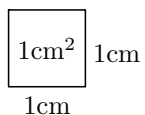

曲線で囲まれた図形の面積

1 $1 \times 1 = 1$ から始めよう

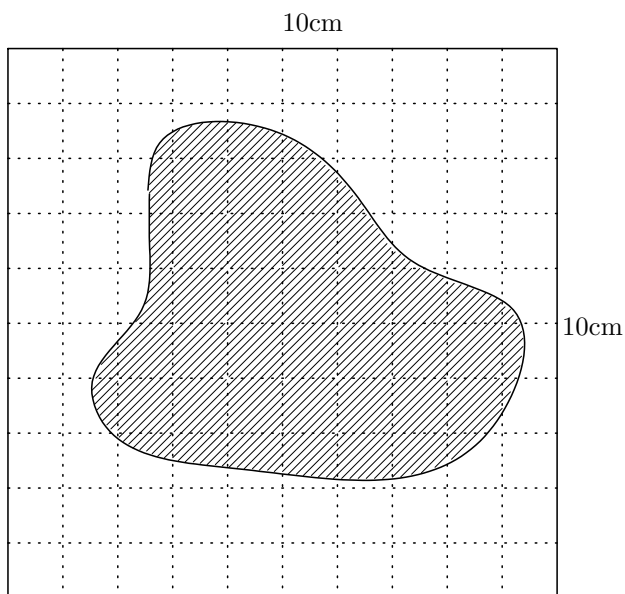
1辺の長さが1 (cm) の正方形の面積を1 (cm^2) と定め、面積の単位としています。



これを元にして、長方形の面積は「(縦の長さ) × (横の長さ)」で計算できました。

2 曲線でかこまれた部分の面積って？

では、曲線で囲まれた領域の面積はどのようにして求められるのでしょうか。皆さんの中には小学校で次のようなことをした覚えのある人がいるかもしれません。



斜線部に完全に含まれる正方形の個数は 個，斜線部と少しでも重なる正方形の個数は 個，だから，斜線部の面積は cm^2 と cm^2 の間にある。

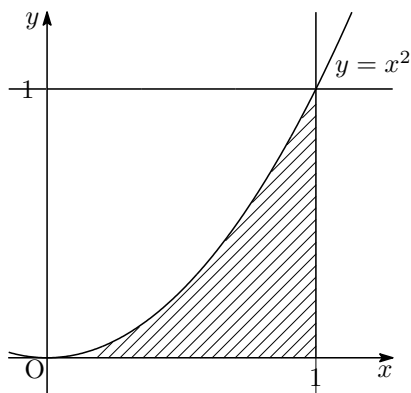
前ページで大まかに斜線部の面積がいくらといくらの間になるかを見積もりました。ずいぶん荒っぽい値しか出てきませんが，方眼の目を細かくして，より小さな正方形に分割すればより正確な値に近づくでしょう。

ここでは，「正方形」という面積のはっきりした図形を利用して，曲線で囲まれた図形の面積のおよその値を見積もっています。このように，よくわかっているものを使ってまだわからないものを求めていく，という方法は数学のなかでしばしば使われます。まとめておきましょう。

思考の方法その1：わかっている事を使ってわからないことに迫る

3 2次関数のグラフで囲まれた図形の面積はどうか

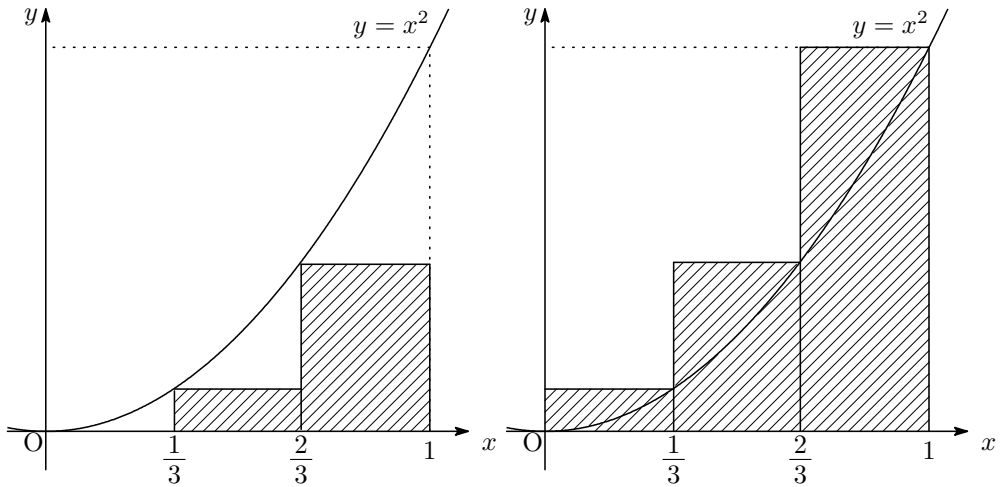
皆さんがよく知っている曲線として，2次関数 $y = x^2$ のグラフを例にとってみましょう。次の斜線部の面積がいくらになるかを考えていきましょう。



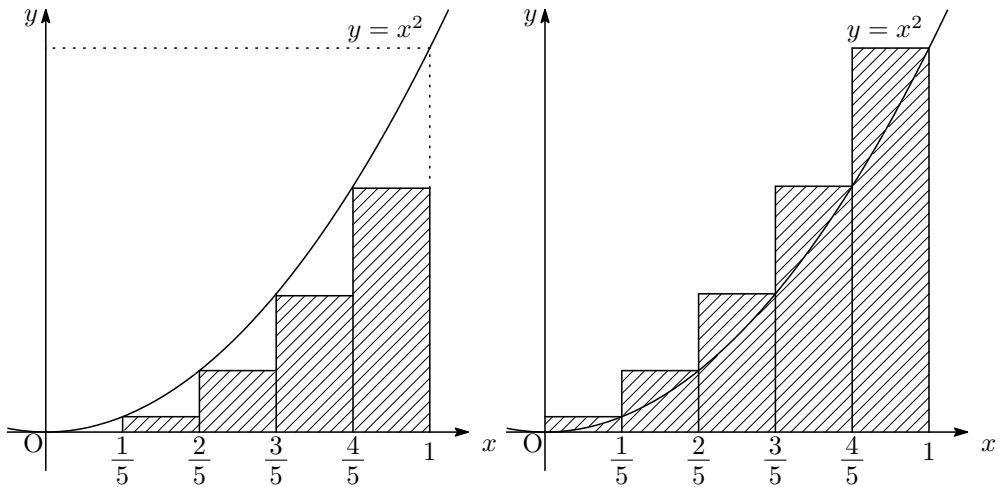
さて，ここで上に出てきた「わかっている事を使ってわからないことに迫る」という方法を使います。長方形の面積は計算できるので，それを使って2次関数のグラフで囲まれた部分の面積に迫りましょう。

右図において，求めたい部分に完全に含まれる背の低い長方形の面積の合計と，求めたい部分を完全に含む背の高い長方形の面積の合計を計算してみてください。ほん

とうの面積は、これらの間にあるはずです。



ずいぶん荒っぽい見積もりです。もうすこし分割を増やして、5分割してみましょう。次の図の斜線部の面積を求めてみてください。



4 めんどうな計算の工夫ができないか

前ページで、長方形の面積の合計を求めるときに、次のような計算式がでてきた事と思います。

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^3}(1^2 + 2^2)$$

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

もし、10分割して面積の計算をするとしたら、きっと次の和が必要になるでしょう。

$$\frac{1}{10^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2)$$

ここに現れる $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2$ などでは、平方数が順番に規則的にならんでいます。それらの合計を求めることが、面積計算のために必要となっています。

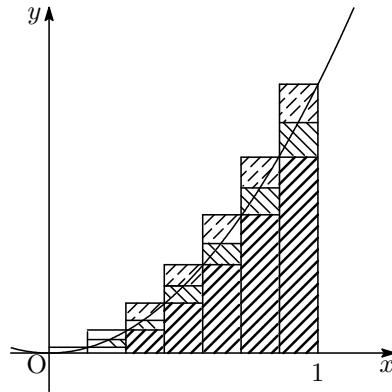
このような数の並びの規則性を利用してその性質を調べたり、和の求め方を工夫したりすることについては高等学校「数学 A」の「数列」という単元で学びます。一般に、何らかの規則性を読み取って利用することは、しばしば用いられる基本的な方法の一つです。まとめておきましょう。

思考の方法その 2： 規則性を読み取って利用する

ここでは、これらの計算にはこれ以上触れずに、コンピュータを使った計算結果を利用して面積についてさらに考えを進めていきましょう。

5 分割の数を増やすとどうなるか

ここはコンピュータでのプレゼンテーションを見てください。



求めたい部分の面積は、背の低い長方形の面積の和より大きく、背の高い長方形の面積の和より小さいはず。ここでは、さらに区間の真中での y の値を高さにとった長方形の面積の和も計算してみましょう。コンピュータによる計算結果をメモしてください。

| | 低い長方形の面積和 | 中間の長方形の面積和 | 高い長方形の面積和 |
|--------|-----------|------------|-----------|
| 10 分割 | | | |
| 50 分割 | | | |
| 100 分割 | | | |

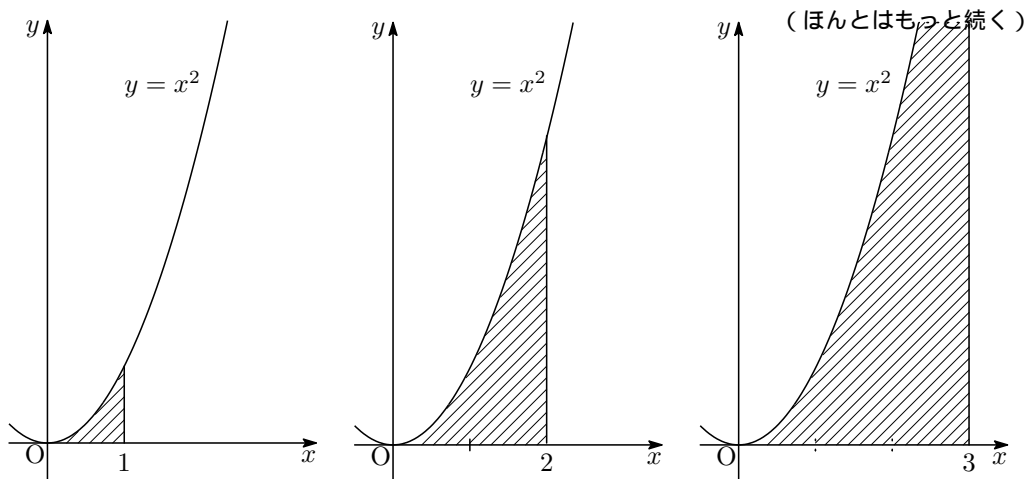
これらの値をみて、「本当の面積」はいくらになると予想されますか？

観察と予想その 1：2 次関数 $y = x^2$ のグラフと x 軸ではさまれた部分の、 $x = 0$ から $x = 1$ までの範囲の面積は、 となるだろう。

6 幅を変えたらどうなるだろうか

ここはコンピュータでのプレゼンテーションを見てください。

幅を $x = 0$ から $x = 2$ までの間, $x = 0$ から $x = 3$ までの間, ... と順次広げていったとき面積はどうなるでしょうか。その特徴を読みとってみましょう。



実は, これらの値はすべて分数の形で表せます。コンピュータの計算結果は小数を用いた近似値ですが, 分数で表したらどうなるかを考えて書きとってください。

| 右端 | $x = 1$ まで | $x = 2$ まで | $x = 3$ まで | $x = 4$ まで | $x = 5$ まで |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 面積 | | | | | |

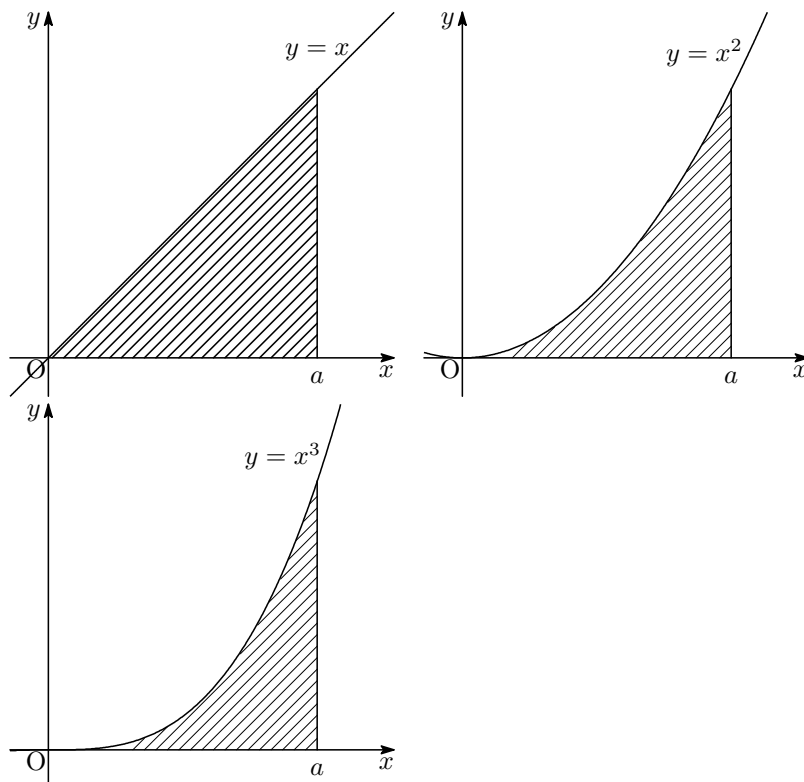
ここで, 「規則性を読みとって利用」してみましょう。分母を共通にして, 分子に注目することで, $x = 5$ の場合にはいくらになるか予想してください。

さらに, $x = 0$ から $x = a$ までの面積はどのように表せると予想されますか?

観察と予想その 2 : 2 次関数 $y = x^2$ のグラフと x 軸ではさまれた部分の, $x = 0$ から $x = a$ までの範囲の面積は, となるだろう。

7 其他関数のグラフではどうなるだろうか

さらに進んでみましょう。他の関数のグラフを使ったら面積はどうなるでしょうか。



1次関数 $y = x$ のグラフの場合に、斜線部の面積がどう表せるか書いてみてください。2次関数 $y = x^2$ のグラフの場合に、斜線部の面積がどう表せたかもう一度書いてみてください。この二つを並べて、「規則性を読み取って利用する」とい方法をもう一度使ってみると、 $y = x^3$ の場合にはどうなるか見えてきませんか？

観察と予想その3：3次関数 $y = x^3$ のグラフと x 軸ではさまれた部分の、 $x = 0$ から $x = a$ までの範囲の面積は、 となるだろう。

さて、この予想は正しいでしょうか？もし正しいとしたら $y = x^4$ の場合には？ $y = x^5$ の場合には？一つのことが明らかになれば、その先に新しい予想や見通しがひらけ、同時にそれは本当だろうかという新たな疑問が浮かびます。

8 終わりに

$1 \times 1 = 1$ から話をはじめて、ずいぶん遠くまでやってきました。正直な話、ここまでついてきた人はスゴイ。

ここで取り上げたテーマは、積分という分野につながるもので、高校で学ぶ数学の中でも大きな位置をしめるものです。

長方形の面積和を計算したところでは、分割の幅をどんどん小さくした時にいくらに近づくかを考えました。ここに現れている「どんどん近づいていく」という考え方は高等学校「数学 II」の「関数の値の変化」という単元や、「数学 III」の「極限」という単元で学びます。これは、「わかっている事を使ってわからないことに迫る」という方法を徹底的に（まさに極限まで）実行するための手段と言えます。

また、規則性を利用して数の並びの先のほうを求めたり、その合計を求めたりする部分は高等学校「数学 A」の中の「数列」という単元で学びます。これは「規則性を読み取って利用する」という方法の一例です。今日の話の中でもこの方法は予想を立てるために何度も利用しました。

面積を長方形の和の極限として考える「区分求積」（言葉の厳密な意味はわからなくてもかまいません。雰囲気を感じてください）という考え方は、「数学 III」の「積分法」という単元で現れます。

高校で学ぶ数学の雰囲気を覚えてもらえたでしょうか？

今日は、コンピュータを利用して幾つかの計算をすませ、また、ほとんどの結果について幾つかの例を観察して予想しただけで終わりました。数学には、このように例を観察して性質を見つけたり予想したりする側面と、それらがほんとうにいつでも成り立つのかどうかを吟味し、証明を与え、確かなものにする側面があります。今日は後者については取り上げませんでした。これらは、高校入学後に学んでほしいと思います。

豊中高校学校見学会・授業体験

2000年10月21日(土)

大阪府立豊中高等学校数学科