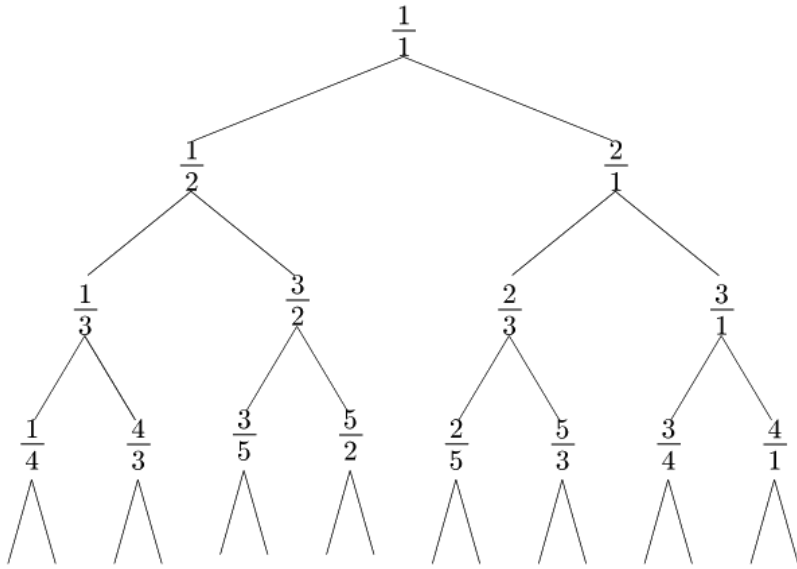

有理数の樹

1 有理数の樹

まず、次の図を見てください。



$\frac{1}{1}$ から始めて、分数 $\frac{i}{j}$ の左下には $\frac{i}{i+j}$ 、右下には $\frac{i+j}{j}$ を置きます。これを繰り返して得られたものが上の図です。続きを少し書いてみてください。この過程を無限に続けてできた図は、すべての正の有理数が既約分数の形でちょうど1回ずつ現れる、という性質を持っています。以下、これを「有理数の樹」と呼ぶことにします。

2 有理数の樹の性質

2.1 現れる分数はすべて既約である

$\frac{i}{j}$ から作られる 2 つの分数は, $\frac{i}{i+j}$ と $\frac{i+j}{j}$ でした。ここで, i と j の最大公約数と, i と $i+j$ の最大公約数, $i+j$ と j の最大公約数は一致します。この事実と, 出発点である $1/1$ の分母分子の最大公約数が 1 であることから, 有理数の樹の中に現れる分数の分母分子の最大公約数は常に 1 であること, すなわち既約分数しか表れないことがわかります。

2.2 正の有理数はすべて現れる

かってな正の有理数を取り, 既約分数の形で $\frac{i}{j}$ と表しておきます。この数が有理数の樹の中に確かに現れることを示しましょう。そのために, ちょうど有理数の樹を作るときと逆の過程にあたる次のような操作を考えます。

- (1) $i > j$ のとき, $\frac{i}{j}$ を $\frac{i-j}{j}$ にとりかえる。
- (2) $i < j$ のとき, $\frac{i}{j}$ を $\frac{i}{j-i}$ にとりかえる。
- (3) $i = j$ のとき, 操作を停止する。

問題 2.1. $\frac{12}{15}$ にこの操作を停止するまで繰り返し適用してみよ。また, 他の分数についてもいくつか試してみよ。

この操作は, 分子 i と分母 j にユークリッドの互除法を適用していることに相当します。この操作を繰り返すと, やがて分母分子が i と j の最大公約数に一致して停止します。 $\frac{i}{j}$ が既約分数であるなら, やがて $\frac{1}{1}$ となって停止します。このとき, 操作の過程で得られた分数の列を逆に辿れば, $\frac{1}{1}$ から有理数の樹を作る操作 2 種類のどちらか一方を選びながら $\frac{i}{j}$ に到達する列となっています。したがって, $\frac{i}{j}$ は有理数の樹の中に現れます。

2.3 1 つの有理数は 1 回しか現れない

前項で考えたことから, 既約分数 $\frac{i}{j}$ を 1 つ定めると, そこから樹を上にかのぼって $\frac{1}{1}$ に到達する経路が唯一つ定まることがわかります。このことは, 有理数の樹の中で同じ既約分数が異なる 2 箇所に現れることがない, ということをも示しています。

こうして, 有理数の樹には正の有理数が既約分数の形で全部, ちょうど 1 回ずつ現れるということがわかりました。有理数の樹と呼ぶにふさわしいものだと言えるでしょう。

3 有理数を並べる

有理数の樹の中に、正の有理数が、過不足なくちょうど1回ずつ現れることを利用すると、有理数を1列に並べることができます。有理数の樹の中で、同じ高さにある数の並びを上から0行目、1行目、2行目、 \dots と呼ぶことにします。0行目の後に1行目、その後に2行目、とつなげて並べると、次のような数列が得られます。

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \dots$$

この既約分数の列を眺めていると、常にある項の分母が次の項の分子と等しい、ということに気がつきます。この性質から、この数列を $\{f(n)/f(n+1)\}_{n \geq 0}$ と表すことができます。このとき、整数の列 $f(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) がどのように決まるかを調べてみましょう。

1ページの図に、1行に並べたときの項番号を第0番から始めて順に書き入れてみましょう。すると、第 n 項から出る2本の枝の先に来るのは、第 $2n+1$ 項と第 $2n+2$ 項であることがわかるでしょう。このことと、有理数の樹の作り方から、次の関係が導かれます。

$$\frac{f(n)}{f(n)+f(n+1)} = \frac{f(2n+1)}{f(2n+2)}, \quad \frac{f(n)+f(n+1)}{f(n+1)} = \frac{f(2n+2)}{f(2n+3)}$$

これらの両辺は、ともに既約分数の形で表されているので、分母分子それぞれが一致して、次の漸化式が得られます。

$$f(2n+1) = f(n), \quad f(2n+2) = f(n) + f(n+1)$$

初期値 $f(0) = 1$ を与えれば、この漸化式によって数列 $\{f(n)\}$ は決まります。以上をまとめて、次の定理が得られました。

定理 3.1. 初期値 $f(0) = 1$ と漸化式

$$f(2n+1) = f(n) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(2n+2) = f(n) + f(n+1) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

によって定まる数列 $\{f(n)\}_{n \geq 0}$ を利用して、数列

$$\frac{f(0)}{f(1)}, \frac{f(1)}{f(2)}, \frac{f(2)}{f(3)}, \frac{f(3)}{f(4)}, \frac{f(4)}{f(5)}, \dots$$

を作ると、この数列にはすべての正の有理数が既約分数の形でちょうど1回ずつ現れる。□

4 整数の分割との関係

前節の $f(n)$ は、整数のある条件を満たす分割の総数であることが知られています。

正の整数 n に対して、正の整数の組 (p_1, p_2, \dots, p_k) , $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k$, で $n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ を満たすものを n の分割と言い、個々の p_i を分割のパーツと呼ぶことにします。 n の分割の総数を分割数といい、 $p(n)$ と表します。

さらに条件を加えて、奇数だけを用いた分割、異なる数への分割、同じ数を用いる回数を制限した分割、などを考えることが可能です。以下、「正の整数 n の、 2^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) の形の数への分割で、同じ数を高々 2 回しか用いないようなものの総数 $b(n)$ 」を調べます(簡単のために、このような分割を n の複 2 進分割と呼びます)。実は、この条件つき分割数 $b(n)$ が、 $f(n)$ と一致するのです。なお、 $b(0) = 1$ と定義しておきます。

4.1 $b(n)$ は $b(2n+1) = b(n)$ を満たす

$2n+1$ の複 2 進分割はパーツとして 1 を 1 個だけ含みます。この 1 を取り除き、他のパーツ(すべて偶数)をすべて 2 で割ると、 n の複 2 進分割が得られます。逆に、 n の複 2 進分割に対して、各パーツをすべて 2 倍し、新たに 1 をパーツとして付け加えれば、 $2n+1$ の複 2 進分割が得られます。この対応は互いに逆対応であり、 $2n+1$ の複 2 進分割と n の複 2 進分割が 1 対 1 に対応しています。したがって、 $b(2n+1) = b(n)$ が成り立ちます。

4.2 $b(n)$ は $b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$ を満たす

$2n+2$ の複 2 進分割は、パーツとして 1 を含まないか、または 2 個含むかのいずれかです。このとき、 $2n+2$ の複 2 進分割で 1 を含まないものの全体が n の複 2 進分割の全体と 1 対 1 に対応し、 $2n+2$ の複 2 進分割で 1 を 2 個含むものの全体が $n+1$ の複 2 進分割の全体と 1 対 1 に対応することが、それぞれ具体的に対応を作ることで確かめられます。したがって、 $b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$ が成り立ちます。

これらの結果と定理 3.1 を合わせて次が得られます。

定理 4.1. 正の整数 n の複 2 進分割の個数を $b(n)$ とし、 $b(0) = 1$ とおくとき、数列

$$\frac{b(0)}{b(1)}, \frac{b(1)}{b(2)}, \frac{b(2)}{b(3)}, \frac{b(3)}{b(4)}, \frac{b(4)}{b(5)}, \dots$$

にはすべての正の有理数が既約分数の形でちょうど 1 回ずつ現れる。□

参考文献

[1] H.S.Wilf, Lectures on Integer Partitions, <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/>